Крупа в шприце

Задача 1. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 10 класс, задача 1] «Крупа в шприце».

Оборудование: шприц 20 мл; пластиковая трубка; крупа в пластиковом стаканчике; мерная лента; канцелярский зажим; штатив с лапкой; 2 листа миллиметровой бумаги для построения графиков; малярный скотч (по требованию); пластиковая ёмкость с водой (воду можно попросить долить); салфетки или бумажные полотенца для поддержания чистоты рабочего места.

Задание. С помощью выданного оборудования измерьте:

1. площадь внутреннего поперечного сечения трубки S и оцените её погрешность ΔS;
2. атмосферное давление $p_{\text{атм}}$.

Достаньте поршень из шприца. Если шприц внутри влажный, то тщательно удалите воду салфеткой. Поместите некоторое количество крупы в этот шприц. Верните поршень на место.

Внимание! Зерна крупы очень быстро намокают и увеличивают свой объём, поэтому их НЕЛЬЗЯ мочить. Решения, допускающие контакт крупы с водой, не будут оцениваться. Дополнительные порции крупы выдаваться не будут.

3. Определите пустотность α крупы, т. е. отношение объёма воздуха между зёрнами к полному (насыпному) объёму, занимаемому крупой: $\alpha = \dfrac{V_{\text{возд}}}{V_{\text{насып}}}$.

Примечание 1. При выполнении работы отдельные компоненты из перечня оборудования можно размещать как на столе, так и на полу.

Примечание 2. Погрешность в задаче требуется оценить только для площади поперечного сечения трубки в пункте 1.

Примечание 3. Плотность воды считайте равной $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Это опыт на закон Бойля — Мариотта. Сечение трубки находим из объёма: известный по шкале шприца объём воды растягивается в трубке на измеримую длину. Давление находим,

«подвешивая» столб воды на воздухе шприца: поднимаем шприц, вода в трубке поднимается, воздух в шприце расширяется на объём Sl, а его давление падает на $\rho g h$. Связь h и l при неизменной температуре содержит $p_{\text{атм}}$ — его даёт наклон прямой. Тот же опыт с крупой в шприце даёт объём воздуха между зёрнами, не намочив их. Ниже обработаны данные измерений из решения организаторов.

Обозначения. V — объём воды, вытесненной из шприца в трубку; L — длина заполненного водой участка; $V_0 = 20$ мл — объём воздуха в шприце; h — высота уровня воды в трубке над уровнем воды в ёмкости; l — длина участка трубки, занятого воздухом.

Пункт 1. Сечение трубки.

1. Идея. Набираем в шприц воду, присоединяем трубку и выдавливаем в неё $V = 14$ мл воды без пузырей (рис. 1). Вода в трубке — цилиндр, $V = SL$, поэтому

$$S = \frac{V}{L}.$$

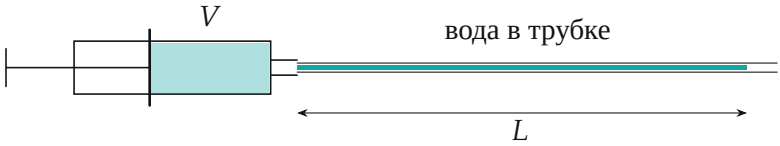

Рис. 1. Объём V воды из шприца занимает в трубке участок длиной L.

2. Измерения. Три раза при $V = 14$ мл:

L_1, см	L_2, см	L_3, см	$L_{\text{ср}}$, см
111,4	111,5	111,0	111,3

$$S = \frac{14 \cdot 10^3 \text{ мм}^3}{1113 \text{ мм}} = 12{,}6 \text{ мм}^2.$$

3. Погрешность. Длина: случайная часть — среднее отклонение $\Delta L_{\text{случ}} = \frac{1}{3}\sum |L_i - L_{\text{ср}}| = 2$ мм, систематическая (лента, неточно выпрямленная трубка) $\Delta L_{\text{сист}} \approx 2$ мм; всего

$$\Delta L = \sqrt{\Delta L_{\text{случ}}^2 + \Delta L_{\text{сист}}^2} \approx 3 \text{ мм}, \qquad \varepsilon_L = \frac{3}{1113} \approx 0{,}3\,\%.$$

Объём: половина цены деления шприца, $\Delta V = 0{,}5$ мл, $\varepsilon_V = 0{,}5/14 = 3{,}6\,\%$. Для частного относительные погрешности складываются; ε_L на порядок меньше, поэтому $\varepsilon_S \approx \varepsilon_V = 3{,}6\,\%$ и

$$\Delta S = \varepsilon_S S \approx 0{,}5\ \text{мм}^2.$$

Погрешность целиком определяется шкалой шприца: измерять длину точнее бесполезно, выгоднее брать объём побольше.

Пункт 2. Атмосферное давление.

4. Установка. Мерную ленту закрепляем вертикально (лапка штатива — пол), ёмкость с водой на полу. Трубку целиком заполняем водой, нижний конец зажимом держим под водой. Поршень пустого шприца ставим на $V_0 = 20$ мл и присоединяем шприц к верхнему концу трубки. Поднимаем шприц вдоль ленты: вода в трубке поднимается на высоту h над уровнем в ёмкости, а у шприца остаётся участок воздуха длиной l (рис. 2). Шприц держим за верхнюю часть, чтобы не греть воздух рукой, поршень перед каждым отсчётом возвращаем на 20 мл.

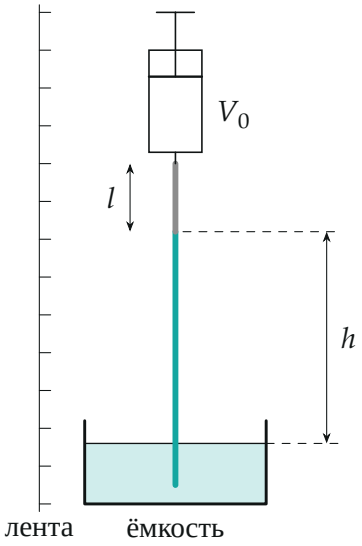

Рис. 2. Шприц поднят: в трубке столб воды высотой h над уровнем в ёмкости и участок воздуха длиной l (серый).

5. Давление в шприце. Гидростатика для столба воды в трубке: на уровне воды в ёмкости давление равно $p_{\text{атм}}$, на верхней границе столба — на $\rho g h$ меньше; там начинается воздух, связанный со шприцем, поэтому

$$p = p_{\text{атм}} - \rho g h.$$

6. Закон Бойля — Мариотта для воздуха в шприце (масса воздуха и температура не меняются) между началом ($p_{\text{атм}}$, V_0) и положением на высоте h (p, $V_0 + Sl$):

$$p_{\text{атм}} V_0 = (p_{\text{атм}} - \rho g h)(V_0 + Sl) \;\Rightarrow\; \rho g h = p_{\text{атм}} \frac{Sl}{V_0 + Sl}.$$

Обозначим $Y = \dfrac{Sl}{V_0 + Sl}$: график $\rho g h(Y)$ — прямая с наклоном $p_{\text{атм}}$. При стыковке шприца с трубкой давление и объём чуть меняются, отчего прямая смещается, но наклон остаётся: $\rho g h = p_{\text{атм}} Y + A$. Поэтому точку $(0;\,0)$ не используем, а $p_{\text{атм}}$ берём из наклона.

7. Данные и обработка ($S = 12{,}6$ мм^2, $V_0 = 20\,000$ мм^3):

h, см	l, см	Y, 10^{-2}	$\rho g h$, кПа
7,1	2,9	1,79	0,70
15,6	4,4	2,69	1,53
24,4	5,6	3,40	2,39
32,8	7,2	4,33	3,21
41,3	8,7	5,19	4,05
49,5	10,5	6,19	4,85
57,9	12,1	7,07	5,67
66,3	13,7	7,93	6,50
74,9	15,1	8,67	7,34
83,5	16,5	9,40	8,18

Метод наименьших квадратов даёт наклон 96,0 кПа (погрешность наклона $\approx 1{,}3$ кПа) и смещение $A = -1{,}0$ кПа:

$$p_{\text{атм}} \approx 96 \text{ кПа}.$$

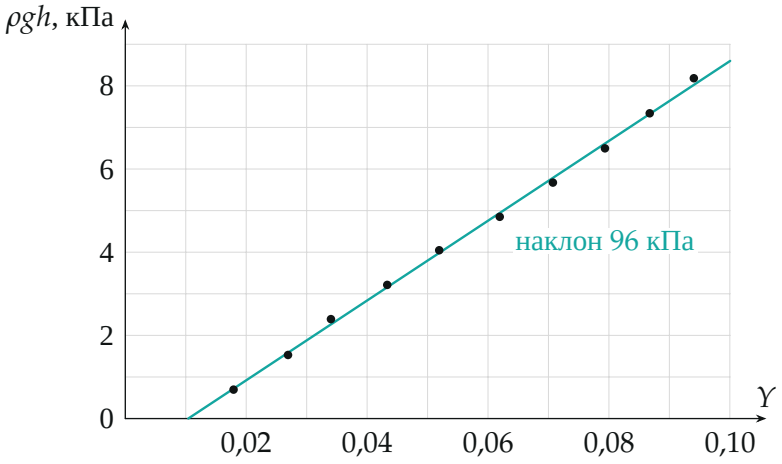

Рис. 3. Зависимость ρgh от $Y = Sl/(V_0 + Sl)$: точки — измерения, прямая — метод наименьших квадратов.

Пункт 3. Пустотность крупы.

8. Идея. Насыпаем в шприц крупу до отметки $V_{\text{насып}} = 20$ мл (побольше — чтобы воздуха было больше и точность выше), встряхиваем и прижимаем поршнем. Теперь в шприце воздух только между зёрнами, его объём $V_{\text{возд}} = \alpha V_{\text{насып}}$. Повторяем опыт пункта 2; зёрна вода не трогает — она остаётся в трубке.

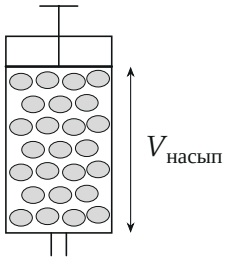

Рис. 4. Шприц с крупой: воздух занимает только промежутки между зёрнами, его объём $\alpha V_{насып}$.

9. Закон Бойля — Мариотта для воздуха между зёрнами:

$$p_{\text{атм}}\,\alpha V_{\text{насып}} = (p_{\text{атм}} - \rho gh)(\alpha V_{\text{насып}} + Sl) \;\Rightarrow\; l = \alpha\,\frac{\rho gh\,V_{\text{насып}}}{S(p_{\text{атм}} - \rho gh)} = \alpha X.$$

График $l(X)$ — прямая с наклоном α (со смещением от стыковки, как в пункте 2). $p_{атм} = 96$ кПа берём из пункта 2.

10. Данные и обработка:

h, см	l, см	X, см
8,1	1,9	1,33
17,3	2,7	2,86
26,6	3,4	4,44
35,6	4,4	5,99
44,8	5,2	7,62
54,0	6,0	9,27
63,6	6,4	11,04
72,3	7,7	12,67
81,6	8,4	14,44
90,8	9,2	16,24

Наклон по методу наименьших квадратов $0{,}490 \pm 0{,}011$:

$$\alpha \approx 0{,}49.$$

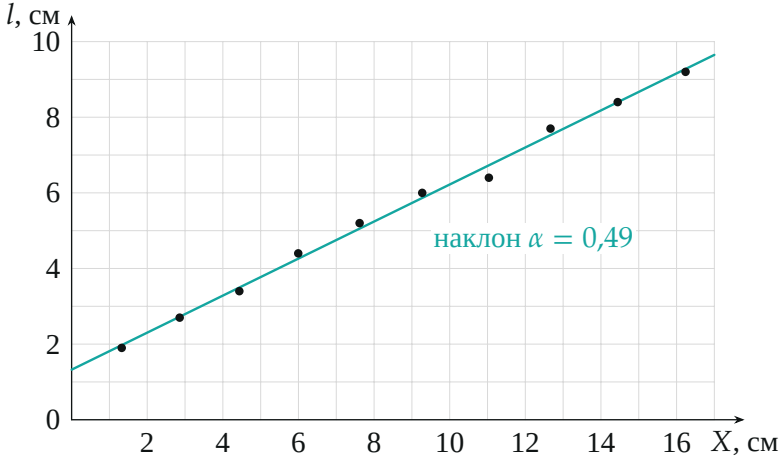

Рис. 5. Зависимость l от $X = \rho g h V_{насып}/(S(p_{атм} - \rho g h))$; наклон прямой — пустотность.

Обратите внимание. Нулевую точку в обработку не берём: при надевании шприца на трубку воздух немного сжимается, и прямая не проходит через начало координат. Все искомые величины — наклоны, на них такой сдвиг не влияет.

Проверка. Размерность: Y безразмерна, наклон $\rho g h(Y)$ — давление; $X = \dfrac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{Па}}$ — длина, наклон $l(X)$ безразмерен. Результаты правдоподобны: 96 кПа — обычное атмосферное давление (около 720 мм рт. ст.); пустотность 0,49 — близко к плотной насыпке шариков (у шаров $\approx 0{,}4$, у неправильных зёрен больше). При $\alpha = 1$ (крупы нет) формула пункта 3 переходит в формулу пункта 2: $l = \rho g h V / (S(p - \rho g h))$.

Ответ. 1) $S \approx 12{,}6$ мм^2, $\Delta S \approx 0{,}5$ мм^2; 2) $p_{\text{атм}} \approx 96$ кПа; 3) $\alpha \approx 0{,}49$ (по данным измерений организаторов).