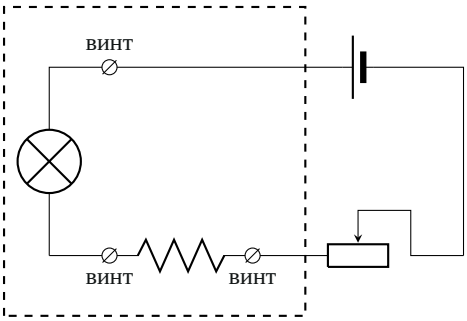
Лампочка — гори!

Задача 2. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 10 класс, задача 2] «Лампочка — гори!».

Внутри лампы накаливания находится нить, сделанная из вольфрама — тугоплавкого металла, удельное сопротивление ρ которого сильно зависит от его температуры T (см. таблицу). Для проведения необходимых измерений используйте выданный Вам комплект, состоящий из последовательно соединённых между собой элементов: лампы накаливания, постоянного резистора, переменного резистора и батарейки. При расчётах считайте, что комнатная температура равна 300 К, а тепловым расширением вольфрама можно пренебречь.

Оборудование: комплект для измерений с лампочкой, тремя контактами и выведенными наружу переменным резистором и колодкой для батарейки (схема соединения изображена на рисунке); батарейка; мультиметр (в режиме вольтметра и омметра) с щупами; три листа миллиметровой бумаги для построения графиков.



Комплект для измерений не разбирать! Горящую лампу руками не трогать! Во избежание разряда батарейки не держите цепь замкнутой, когда не производите измерений! Режимом амперметра пользоваться запрещено! Перед измерениями в режиме омметра необходимо отсоединить от цепи батарейку! В данной задаче расчёт погрешностей не требуется.

T, К	300	500	700	900	1100	1300	1500
ρ, 10^{-8} Ом · м	5,65	10,48	15,75	21,35	27,23	33,29	39,50
T, К	1700	1900	2100	2300	2500	2700	2900
ρ, 10^{-8} Ом · м	45,88	52,40	59,05	65,82	72,71	79,71	86,81

1. Основываясь на приведённой таблице, постройте график зависимости ρ/ρ_0 от температуры нити T, где ρ — удельное сопротивление вольфрама при температуре T, ρ_0 — его удельное сопротивление при комнатной температуре T_0.
2. Найдите сопротивление «холодной» лампы (сопротивление при комнатной температуре).
3. Экспериментально получите зависимость мощности P, выделяемой на лампе, от температуры вольфрамовой нити T, сняв не менее 15 точек. Постройте график полученной зависимости.
4. Основываясь на построенном в пункте 3 графике, сделайте обоснованный вывод о справедливости или несправедливости закона Ньютона–Рихмана $P \sim (T - T_0)$. В случае, если он справедлив только для некоторого диапазона температур, укажите этот диапазон.
5. Предполагая, что при больших температурах характер зависимости $P(T)$ имеет вид $P \sim T^n$, определите n. Считайте, что n может принимать одно из целочисленных значений: 1, 2, 4 или 6.

▲ **Решение. Что происходит.** Это опыт «нить — сама себе термометр». Длина и сечение нити не меняются (расширением пренебрегаем), поэтому сопротивление лампы пропорционально удельному: $R_л/R_0 = \rho/\rho_0$. Измерив сопротивление горящей лампы, по таблице находим температуру нити. Ток без амперметра находим по напряжению на известном последовательном резисторе. Дальше — анализ $P(T)$: при малом нагреве лампа отдаёт тепло пропорционально разности температур (закон Ньютона — Рихмана), при сильном — излучает, и $P \propto T^4$ (закон Стефана — Больцмана). Ниже обработаны данные измерений из решения организаторов.

Обозначения. R_0 — сопротивление холодной лампы, r — постоянный резистор, $U_л$ и U_r — напряжения на лампе и на резисторе, I — ток в цепи.

Пункт 1. График $\rho/\rho_0(T)$**.** Делим каждое значение таблицы на $\rho_0 = 5{,}65 \cdot 10^{-8}$ Ом·м:

T, K	300	500	700	900	1100	1300	1500
ρ/ρ_0	1,00	1,85	2,79	3,78	4,82	5,89	6,99
T, K	1700	1900	2100	2300	2500	2700	2900
ρ/ρ_0	8,12	9,27	10,45	11,65	12,87	14,11	15,36

График (рис. 1) почти прямой, слегка выпуклый вниз; между точками таблицы температуру находим линейной интерполяцией.

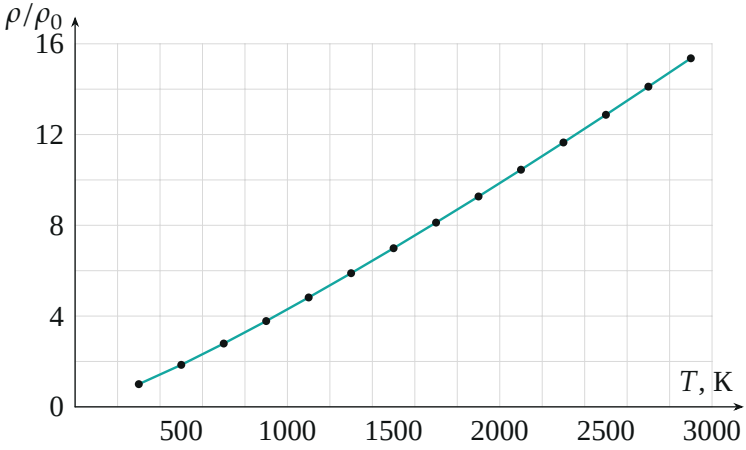


Рис. 1. Относительное удельное сопротивление вольфрама по данным таблицы.

Пункт 2. Сопротивление холодной лампы. Батарейку вынимаем, мультиметр в режиме омметра подключаем к винтам лампы. Ток омметра мал и лампу не греет, поэтому измеряем сопротивление при $T_0 = 300$ K:

$$R_0 = 34{,}0 \text{ Ом}.$$

Тем же способом измеряем постоянный резистор: $r = 81{,}3$ Ом.

Пункт 3. Зависимость $P(T)$.

1. Ток без амперметра. Лампа и резистор r соединены последовательно, ток в них одинаков, поэтому по закону Ома для резистора $I = U_r/r$. Вольтметром по очереди измеряем $U_л$ и U_r (рис. 2).

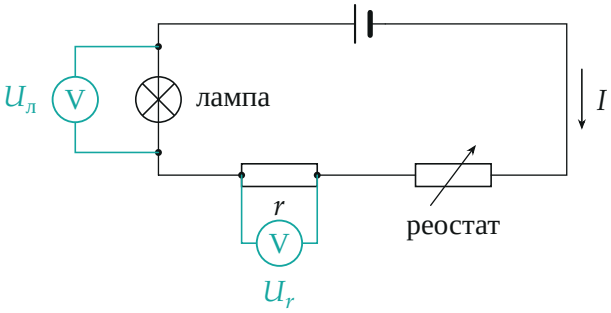


Рис. 2. Электрическая схема измерений: вольтметр поочерёдно подключают к лампе и к резистору r; ток $I = U_r/r$ одинаков во всей цепи.

2. Формулы обработки. Мощность на лампе и её сопротивление:

$$P = U_л I = \frac{U_л U_r}{r}, \qquad \frac{R_л}{R_0} = \frac{U_л/I}{R_0} = \frac{U_л}{U_r} \cdot \frac{r}{R_0}.$$

Так как $R_л/R_0 = \rho/\rho_0$, температуру нити находим по графику рис. 1.

3. Данные. Реостат сначала на максимуме, затем постепенно умень-

шаем его сопротивление:

$U_л$, В	U_r, мВ	P, мВт	$R_л/R_0$	T, К
0,07	161	0,14	1,04	310
0,10	207	0,25	1,16	340
0,14	265	0,46	1,26	360
0,18	300	0,66	1,43	400
0,22	335	0,91	1,57	430
0,35	400	1,72	2,09	550
0,52	462	2,95	2,69	680
0,87	572	6,12	3,64	870
1,29	692	10,98	4,46	1030
1,85	836	19,02	5,29	1190
2,31	944	26,82	5,85	1290
3,16	1120	43,53	6,75	1460
4,08	1289	64,69	7,57	1600
4,77	1409	82,67	8,10	1690
5,44	1515	101,4	8,59	1780
6,20	1624	123,8	9,13	1870
6,82	1704	142,9	9,57	1950
7,07	1744	151,7	9,69	1970

Например, для первой строки $P = \dfrac{0{,}07 \cdot 0{,}161}{81{,}3} = 0{,}14$ мВт, $\dfrac{R_л}{R_0} = \dfrac{0{,}07}{0{,}161} \cdot \dfrac{81{,}3}{34{,}0} = 1{,}04$, по рис. 1 $T \approx 310$ К.

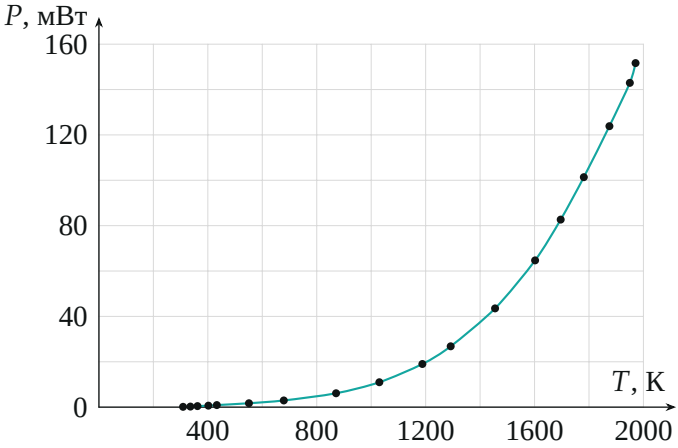


Рис. 3. Мощность, выделяемая на лампе, от температуры нити (все 18 точек).

Пункт 4. Закон Ньютона — Рихмана. На всём диапазоне $P(T)$ резко нелинейна (рис. 3) — закон $P \propto (T - T_0)$ в целом неверен. Проверим его при малом нагреве. На рис. 3 начальные точки сливаются с осью, поэтому строим $P(T)$ отдельно для 300–1100 K (рис. 4) и проводим прямую $P = k(T - T_0)$ через $T_0 = 300$ K по начальным точкам; $k \approx 0{,}0072$ мВт/K. Точки лежат на прямой примерно до 550 K, дальше уходят вверх. Тот же вывод даёт отношение $P/(T - T_0)$:

T, K	340	360	400	430
$P/(T - T_0)$, мВт/K	0,0070	0,0074	0,0065	0,0068
T, K	550	680	870	1030
$P/(T - T_0)$, мВт/K	0,0069	0,0078	0,0107	0,0150

(первую точку 310 K отбрасываем: там $T - T_0 = 10$ K, относительная ошибка наибольшая). Отношение примерно постоянно до 550–700 K, затем быстро растёт. Вывод: закон Ньютона — Рихмана формально выполняется примерно до 550–700 K.

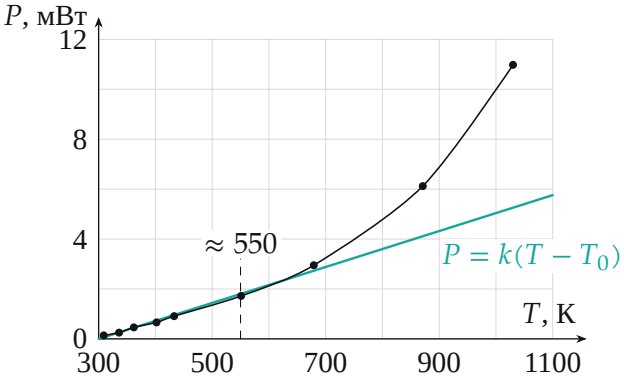


Рис. 4. Начальный участок $P(T)$ и прямая $P = k(T - T_0)$, $k \approx 0{,}0072$ мВт/К: точки отходят от прямой после 550–700 К.

Пункт 5. Показатель n. Если $P = CT^n$, то $\ln P = n \ln T + \ln C$ — прямая с наклоном n в координатах $(\ln T,\ \ln P)$. Берём точки с $T \geq 870$ К (11 точек; T в сотнях кельвинов, P в мВт). Метод наименьших квадратов даёт наклон 3,99 (по точкам от 1190 К — 4,10). Из разрешённых значений 1, 2, 4, 6 подходит

$$n = 4.$$

Проверка по паре точек: $T_1 = 1970$ К, $T_2 = 1600$ К: $T_1/T_2 = 1{,}23$, $(1{,}23)^4 = 2{,}29$, а $P_1/P_2 = 151{,}7/64{,}69 = 2{,}34$; при $n = 2$ было бы 1,52, при $n = 6$ — 3,48.

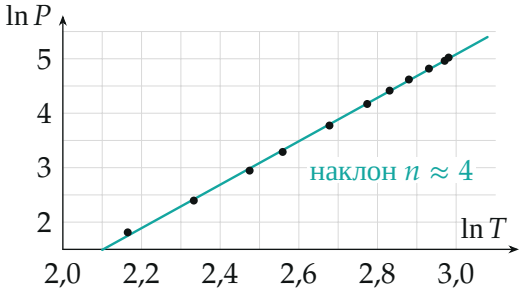


Рис. 5. Точки с $T \geq 870$ К в координатах $(\ln T,\ \ln P)$ (T — в сотнях кельвинов, P — в мВт); прямая — метод наименьших квадратов.

Обратите внимание. Лампа — нелинейный элемент: её сопротивление растёт почти вдесятеро при нагреве. Поэтому R_0 измеряют только омметром на холодной лампе, а не как $U_л/I$ при горящей; а ток — по резистору r, сопротивление которого от тока не зависит.

Проверка. $P = U_л U_r/r$: В·В/Ом = Вт. Предельный случай: при самом малом токе $R_л/R_0 = 1{,}04$ — нить почти холодная, $T \approx 310$ К, как и должно быть. Смысл $n = 4$: при высокой температуре нить отдаёт энергию в основном излучением, а мощность теплового излучения растёт как T^4 (закон Стефана — Больцмана); при малом перегреве главную роль играет теплообмен с окружением, пропорциональный $T - T_0$.

Ответ. 1) график $\rho/\rho_0(T)$ — рис. 1; 2) $R_0 = 34{,}0$ Ом; 3) график $P(T)$ — рис. 3; 4) закон Ньютона — Рихмана формально справедлив примерно до 550–700 К; 5) $n = 4$.