Исследовательский зонд

Задача 1. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 10 класс, задача 1] «Исследовательский зонд».

Исследовательский зонд, находящийся на круговой орбите радиуса R вокруг планеты Шелезяка, изучает движение Болтика — маленького спутника планеты. Орбита Болтика тоже является круговой с радиусом r ($r < R$) и лежит в той же плоскости, что и орбита зонда (см. рис. 1). В процессе наблюдения приборы зонда зафиксировали, что Болтик спустя $t_1 = 165$ мин после пересечения им видимого края диска планеты оказался на максимальном угловом расстоянии $\theta_{max} = 15°$ от центра Шелезяки, а ещё спустя некоторое время, большее t_1, снова пересёк край видимого диска планеты. Известно, что между указанными пересечениями других пересечений Болтика с видимым краем планеты не было. Планета Шелезяка имеет форму шара и лишена атмосферы. Масса Болтика много меньше массы планеты, зонд и спутник обращаются вокруг планеты в одну и ту же сторону. Угловой диаметр планеты, наблюдаемый зондом, равен $2\theta_0 = 6°$. Гравитационная постоянная равна $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.

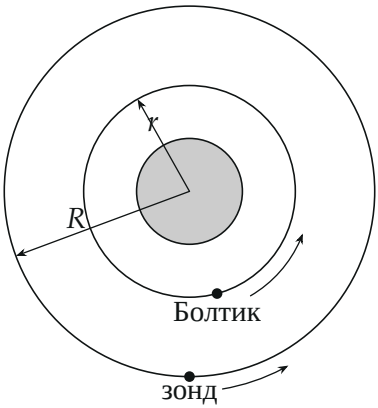


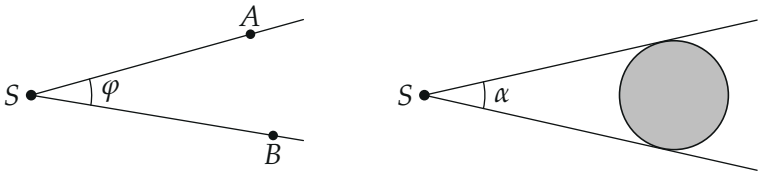
Рис. 1

1. Определите отношение R/r.
2. Чему равен период обращения зонда T вокруг Шелезяки?

3. Найдите среднюю плотность Шелезяки ρ.

Примечание:

1. *Угловым расстоянием* между точками A и B называется величина угла $\angle ASB$, на сторонах которого лежат рассматриваемые точки, а вершина S находится в точке наблюдения (см. рис. 2а).
2. *Угловым диаметром* астрономического объекта (например, звезды или планеты) называется величина максимально возможного угла α между двумя касательными к поверхности рассматриваемого объекта, вершина которого находится в точке наблюдения S (рис. 2б).



а) б)

Рис. 2

▲ **Решение. Что происходит.** Зонд видит Болтик, который «качается» около планеты: удаляется от её центра на угол до $\theta_{\max}$ и снова заходит за край диска (или проходит перед ним). Удобно перейти в систему отсчёта, вращающуюся вместе с зондом: в ней зонд неподвижен, а Болтик равномерно обходит свою орбиту с относительной угловой скоростью $\omega_с - \omega_з$. Дальше — геометрия (какой угол вокруг планеты Болтик прошёл за t_1) и третий закон Кеплера (отношение угловых скоростей).

Обозначения (рис. 3). O — центр планеты, S — зонд; A и C — точки орбиты Болтика на луче зрения, касающемся края диска; B — точка, где луч зрения касается орбиты Болтика; $\omega_с$, $\omega_з$ — угловые скорости Болтика и зонда; $T_{отн}$ — период относительного движения; $R_Ш$, M — радиус и масса планеты.

Пункт 1. Отношение радиусов. Угол между направлением на центр SO и лучом SB максимален, когда луч касается орбиты Болтика: дальше

луч орбиту уже не пересекает. В точке касания $OB \perp SB$, и в прямоугольном треугольнике SOB

$$\sin\theta_{\max} = \frac{r}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{r} = \frac{1}{\sin 15^\circ} \approx 3{,}86.$$

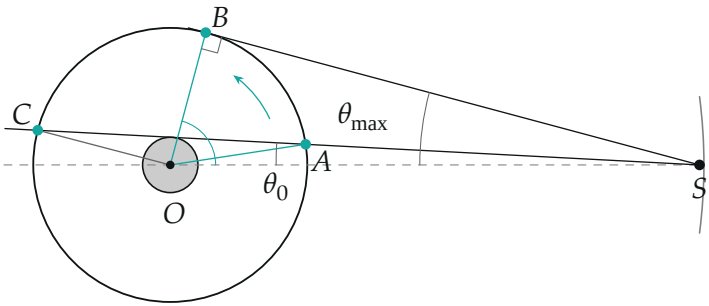


Рис. 3. Чертёж в системе отсчёта зонда (масштаб соблюдён: $R/r = 3{,}86$, $R_Ш = R\sin 3^\circ$). Луч SA касается края диска, SB — орбиты Болтика; бирюзой — угол $\angle AOB$, пройденный за t_1.

2. Какая точка пересечения — начало отсчёта. Луч, касающийся края диска ($\angle OSA = \theta_0 = 3^\circ$), пересекает орбиту Болтика в двух точках: ближней к зонду A и дальней C (рис. 3). Теорема синусов для треугольника SOA:

$$\frac{R}{\sin\angle OAS} = \frac{r}{\sin\theta_0} \quad \Rightarrow \quad \sin\angle OAS = \frac{R}{r}\sin 3^\circ \approx 0{,}202.$$

Для ближней точки угол тупой, $\angle OAS \approx 168{,}33^\circ$, и $\angle SOA = 180^\circ - 3^\circ - 168{,}33^\circ \approx 8{,}67^\circ$; для дальней — острый, $11{,}67^\circ$, и $\angle SOC \approx 165{,}33^\circ$. Точка B: $\angle SOB = 90^\circ - \theta_{\max} = 75^\circ$. Дуги вдоль орбиты:

$$\angle AOB = 75^\circ - 8{,}67^\circ \approx 66{,}33^\circ, \qquad \angle BOC = 165{,}33^\circ - 75^\circ \approx 90{,}33^\circ.$$

По условию после B до следующего пересечения прошло *больше* t_1 — значит, Болтик шёл $A \to B \to C$: от ближней точки к дальней ($90{,}33^\circ > 66{,}33^\circ$). Обратный порядок дал бы после B меньшее время. Между A и C других пересечений нет — так и есть (рис. 4).

3. Относительный период. В системе зонда Болтик движется по окружности равномерно, поэтому дуги пропорциональны временам:

$$\frac{\angle AOB}{360^\circ} = \frac{t_1}{T_{\text{отн}}} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{отн}} = \frac{360^\circ}{66{,}33^\circ} \cdot 165 \text{ мин} \approx 895 \text{ мин}.$$

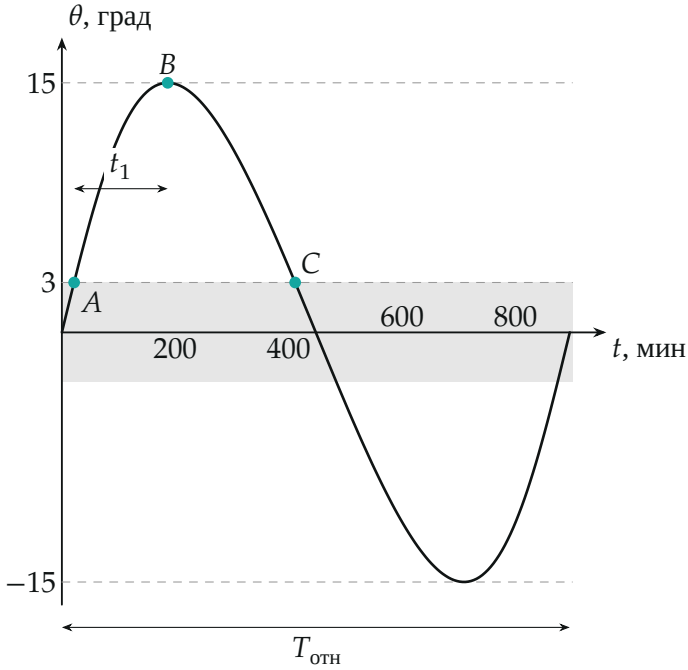


Рис. 4. Угловое расстояние Болтика от центра планеты, видимое с зонда, за один относительный оборот (расчёт по формуле $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{r\sin\varphi}{R - r\cos\varphi}$*); серая полоса — диск планеты,* $|\theta| < 3^\circ$*. От A до B —* $t_1 = 165$ *мин, от B до C —* 225 *мин.*

Пункт 2. Период зонда. Второй закон Ньютона для спутника на круговой орбите: $\omega^2 a = GM/a^2$, $\omega = \sqrt{GM/a^3}$ (третий закон Кеплера). Отсюда

$$\frac{\omega_{\text{с}}}{\omega_{\text{з}}} = \left(\frac{R}{r}\right)^{3/2} \approx 7{,}595.$$

Относительная угловая скорость $\omega_с - \omega_з = \dfrac{2\pi}{T_{отн}}$, а $\omega_з = \dfrac{2\pi}{T}$:

$$T = T_{отн}\left(\frac{\omega_с}{\omega_з} - 1\right) \approx 895 \cdot 6{,}595 \text{ мин} \approx 5{,}9 \cdot 10^3 \text{ мин} \approx 98 \text{ ч}.$$

Пункт 3. Плотность. Угловой радиус планеты: $\sin\theta_0 = R_Ш/R$. Масса $M = \frac{4}{3}\pi R_Ш^3\rho$; подставляем в $\omega_з^2 = GM/R^3$:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi G\rho}{3}\left(\frac{R_Ш}{R}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{3\pi}{GT^2\sin^3\theta_0},$$

$$\rho = \frac{3\pi}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (3{,}54 \cdot 10^5)^2 \cdot 0{,}0523^3} \approx 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Обратите внимание. За время t_1 Болтик прошёл вокруг планеты не $360^\circ \cdot t_1/T$ своего периода, а дугу *относительного* движения: зонд тоже движется, и измеряемое время — время в его системе отсчёта.

Проверка. Размерность: $[GT^2\rho]$ — безразмерно, верно. Плотность получилась как у железа — разумно для каменно-железной планеты. Числа не зависят от размеров: в ответ вошли только углы и времена, так и должно быть для наблюдений одними угломерами. Расчёт $\theta(t)$ (рис. 4) подтверждает: максимум 15° через 165 мин после пересечения края, следующее пересечение ещё через 225 мин.

Ответ. 1) $\dfrac{R}{r} = \dfrac{1}{\sin\theta_{max}} \approx 3{,}86$; 2) $T \approx 5{,}9 \cdot 10^3$ мин ($\approx$ 98 ч); 3) $\rho = \dfrac{3\pi}{GT^2\sin^3\theta_0} \approx 7{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.