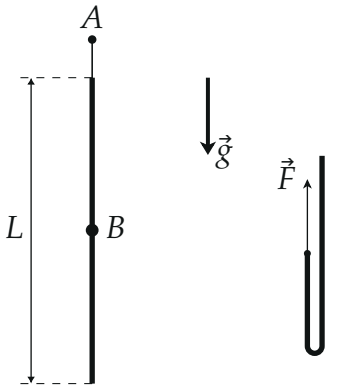
С ускорением

Задача 2. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 10 класс, задача 2] «С ускорением».

Идеально гибкая однородная нерастяжимая цепочка постоянной толщины, массой m и длиной L подвешена с помощью короткой нити к закреплённой точке A (рис. а). В некоторый момент времени нить пережигают, и цепочку начинают тянуть за её нижний конец с постоянной силой F в направлении точки A (рис. б).



а) б)

1. С каким по модулю ускорением a_0 начнёт двигаться верхний конец цепочки сразу после пережигания нити?
2. Через какое время τ после пережигания нити вся цепочка снова выпрямится?
3. Определите модуль скорости цепочки v сразу после её распрямления.
4. Какое количество теплоты Q выделится за время τ?
5. Определите силу натяжения T цепочки в точке B, расположенной в её середине, после её распрямления.

Ускорение свободного падения равно g. Сопротивлением воздуха необходимо пренебречь. Размеры звеньев в цепочке много меньше её длины. Считайте, что столкновения звеньев в цепи неупругие.

▲ **Решение. Что происходит.** Нижний конец тянут вверх, цепочка складывается вдвое: одна ветвь — «тянущаяся» — движется вверх, другая — «свободная» — её никто не тянет, натяжение в ней нулевое, и она просто падает. Звенья переходят через изгиб из свободной ветви в тянущуюся с неупругим ударом — это система переменного состава, но теорема о движении центра масс работает для всей цепочки целиком. Главная идея — перейти в систему отсчёта, свободно падающую с ускорением g: в ней тяжести «нет», свободная ветвь покоится, и на цепочку действует одна сила F.

Обозначения. Ось y — вверх; $\lambda = m/L$ — масса единицы длины; ЛСО — лабораторная система отсчёта, ПСО — падающая с ускорением $\vec{g}$ без начальной скорости; в ПСО $y_и$ — высота изгиба, $y_к$ — высота тянущего конца над начальным положением нижнего конца; u — скорость тянущейся ветви в ПСО.

Пункт 1. Верхний конец принадлежит свободной ветви. На неё действует только сила тяжести (натяжение на её верхнем конце нулевое, на изгибе звенья отрываются в другую ветвь), поэтому

$$a_0 = g.$$

2. Картина в падающей системе отсчёта. В ПСО на каждое звено действуют $m_i\vec{g}$ и сила инерции $-m_i\vec{g}$ — они гасят друг друга. Свободная ветвь покоится, её верх — неподвижная точка A' (рис. 2). Длины ветвей: свободной $L - y_и$, тянущейся $y_к - y_и$; цепочка нерастяжима: $(L - y_и) + (y_к - y_и) = L$, откуда

$$y_к = 2y_и, \qquad u = \dot{y}_к = 2\dot{y}_и.$$

Изгиб движется вдвое медленнее конца.

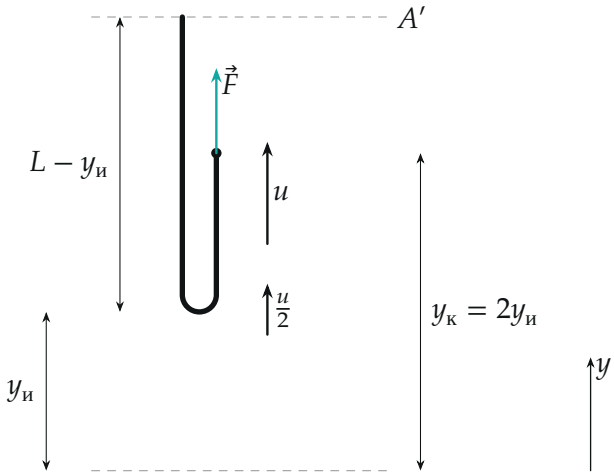


Рис. 2. Цепочка в падающей системе отсчёта в промежуточный момент: свободная (левая) ветвь покоится, тянущаяся движется вверх со скоростью u, изгиб — со скоростью $u/2$.

Пункт 2. Время распрямления. Теорема о движении центра масс для всей цепочки в ПСО: внешняя сила одна, F, поэтому центр масс движется равноускоренно из покоя с ускорением $a' = F/m$. Цепочка распрямилась, когда свободная ветвь кончилась: $y_и = L$, тянущий конец на высоте $2L$, цепочка висит от A' вверх. Центр масс был на $L/2$ ниже A', стал на $L/2$ выше — сместился на L:

$$L = \frac{a'\tau^2}{2} = \frac{F\tau^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{2Lm}{F}}.$$

Второй способ — через импульс. Импульс цепочки в ПСО — импульс тянущейся ветви: $p = \lambda(y_к - y_и)u = \lambda y_и \cdot 2\dot{y}_и = \lambda \dfrac{d(y_и^2)}{dt}$. Второй закон Ньютона $dp/dt = F$ даёт $\lambda y_и^2 = Ft^2/2$, то есть $y_и = t\sqrt{F/(2\lambda)}$ — изгиб и конец движутся *равномерно* (рис. 3), $u = \sqrt{2F/\lambda}$. Условие $y_и(\tau) = L$ даёт то же τ.

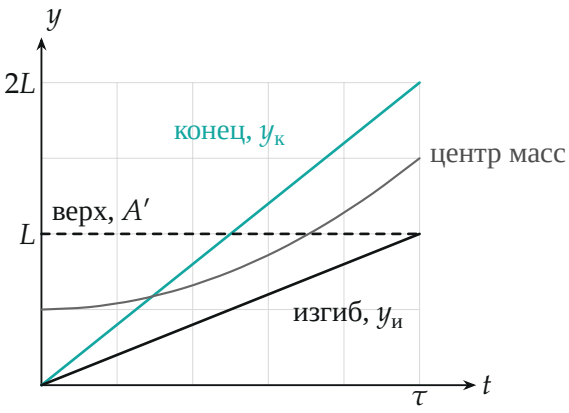


Рис. 3. Падающая система отсчёта: высота тянущего конца и изгиба растёт линейно, центр масс — по параболе (от $-L/2$ до $+L/2$ относительно A', на рисунке — от $L/2$ до $3L/2$ над начальным нижним концом).

Пункт 3. Скорость после распрямления. В момент τ вся цепочка — одна тянущаяся ветвь, все звенья движутся с одной скоростью. В ПСО она равна скорости центра масс, $u = a'\tau = \sqrt{2FL/m}$, вверх. Сама ПСО к этому моменту движется вниз со скоростью $g\tau$. Закон сложения скоростей в проекции на ось y:

$$v_y = u - g\tau = \left(\frac{F}{m} - g\right)\sqrt{\frac{2Lm}{F}}, \qquad v = \left|g - \frac{F}{m}\right|\sqrt{\frac{2Lm}{F}}.$$

При $F < mg$ цепочка в итоге движется вниз, при $F > mg$ — вверх.

Пункт 4. Теплота. Закон изменения энергии в ПСО (силы тяжести и инерции в сумме работы не совершают): работа силы F идёт на кинетическую энергию и на тепло неупругих ударов звеньев в изгибе. Точка приложения F прошла в ПСО путь $2L$:

$$2FL = \frac{mu^2}{2} + Q = FL + Q \quad \Rightarrow \quad Q = FL.$$

Второй способ — в ЛСО: работа F на перемещении конца $2L - \frac{g\tau^2}{2}$, изменение потенциальной энергии $-mg\left(\frac{g\tau^2}{2} - L\right)$ (центр масс опустился

на $\frac{g\tau^2}{2} - L$), кинетическая энергия $\frac{mv^2}{2}$; подстановка $\tau^2 = 2Lm/F$ снова даёт $Q = FL$. Теплота не зависит от g: тяжесть одинаково действует на все звенья и в ударах не участвует.

Пункт 5. Натяжение в середине. После распрямления цепочка прямая, сверху тянет F; все звенья движутся с одним ускорением — ускорением центра масс $\vec{a} = \vec{g} - \vec{F}/m$ (теорема о движении центра масс в ЛСО). Второй закон Ньютона для нижней половины (масса $m/2$, рис. 4) в проекции на ось y (вниз):

$$\frac{m}{2}\left(g - \frac{F}{m}\right) = \frac{m}{2}g - T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{F}{2}.$$

В ПСО то же короче: нижнюю половину разгоняет только натяжение, $T = \frac{m}{2} \cdot \frac{F}{m}$.

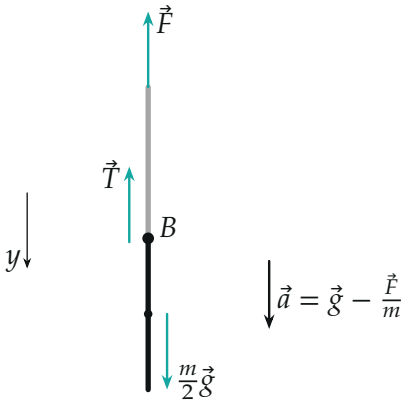


Рис. 4. Цепочка после распрямления (ЛСО): силы на нижнюю половину — натяжение $\vec{T}$ в точке B и тяжесть $\frac{m}{2}\vec{g}$; ускорение всех звеньев одно.

Обратите внимание. Закон сохранения механической энергии здесь не работает: звенья в изгибе соударяются неупруго, и ровно половина работы силы F в ПСО уходит в тепло — как при подхвате цепочки с пола.

Проверка. Размерность: $\sqrt{Lm/F}$ — секунды, FL — джоули. Предел $F = mg$: $v = 0$ — центр масс в ЛСО не ускоряется и, начав из покоя,

остаётся на месте; цепочка просто «переворачивается» вокруг него. Импульс: $mu = m\sqrt{2FL/m} = \sqrt{2mFL} = F\tau$ — совпадает с импульсом силы F за время τ.

Ответ. 1) $a_0 = g$; 2) $\tau = \sqrt{\dfrac{2Lm}{F}}$; 3) $v = \left|g - \dfrac{F}{m}\right|\sqrt{\dfrac{2Lm}{F}}$; 4) $Q = FL$; 5) $T = \dfrac{F}{2}$.