Пузырёк чёрного курильщика

Задача 3. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 10 класс, задача 3] «Пузырёк чёрного курильщика».

В океанах на большой глубине около срединно-океанических хребтов могут встречаться такие источники тепла, как чёрные курильщики. Они извергают геотермальную воду высокой температуры. После одного из таких выбросов в толще океана появился слой теплой воды, температура t в котором изменялась с глубиной h так, как показано на рисунке (представлен на отдельном листе).

Продукты выброса чёрных курильщиков также часто содержат различные газы, которые формируют пузырьки.

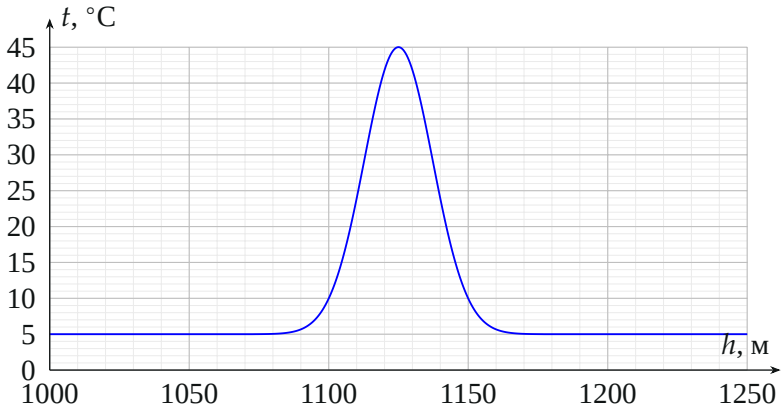
1. Найдите все возможные значения глубины, на которых пузырёк в воде будет находиться в равновесии.
2. Определите, являются ли найденные положения равновесия устойчивыми.

Считайте, что:

- течение в воде отсутствует, и она находится в состоянии покоя;
- пузырёк всегда имеет форму шара, и давление внутри него равно внешнему давлению воды;
- газ внутри пузырька можно считать идеальным;
- температура внутри пузырька равна температуре окружающей воды;
- газ не растворяется в воде.

Молярная масса газа $\mu = 222$ г/моль, плотность воды постоянна и равна $\rho_в = 1020$ кг/м^3, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К), ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Примечание. При сдаче работы лист с рисунком вложите в свое решение.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равновесие тела в жидкости: на пузырёк действуют только сила тяжести газа и сила Архимеда. Плотность газа зависит от давления (растёт с глубиной линейно) и от температуры (задана графиком). Пузырёк покоится там, где плотность газа равна плотности воды. Аналитически уравнение не решить, поэтому решаем графически: условие равновесия даёт прямую $t(h)$, а её пересечения с графиком из условия — положения равновесия. Устойчивость определяем, сдвинув пузырёк чуть глубже или чуть выше.

Обозначения. Ось h направлена вертикально вниз от поверхности; V — объём пузырька, ρ — плотность газа в нём, T — его абсолютная температура (она равна температуре воды на этой глубине), p — давление газа (равно давлению воды).

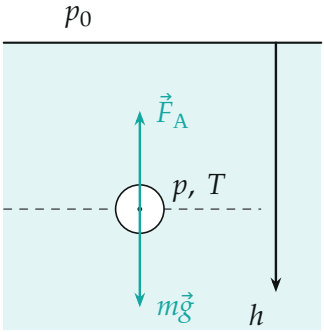


Рис. 1. Пузырёк на глубине h: сила тяжести газа и сила Архимеда. В равновесии стрелки равны.

Пункт 1. Положения равновесия.

1. Условие равновесия пузырька. Второй закон Ньютона для пузырька в покое, в проекции на вертикаль: $F_{\text{A}} = mg$, то есть $\rho_{\text{в}} g V = \rho V g$, откуда

$$\rho = \rho_{\text{в}}.$$

Объём сократился — равновесие не зависит от размера пузырька.

2. Плотность газа — из уравнения Менделеева — Клапейрона. $pV = \dfrac{m}{\mu} RT$ даёт $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{\mu p}{RT}$. Давление в пузырьке равно давлению воды на глубине h (гидростатика): $p = p_0 + \rho_{\text{в}} g h$. Значит,

$$\rho = \frac{\mu\,(p_0 + \rho_{\text{в}} g h)}{RT}.$$

3. Нужная для равновесия температура. Приравниваем $\rho = \rho_{\text{в}}$ и выражаем температуру, при которой пузырёк на глубине h покоится:

$$T_{\text{р}}(h) = \frac{\mu p_0}{R\rho_{\text{в}}} + \frac{\mu g}{R}\, h = 2{,}62\ \text{К} + 0{,}2675\ \frac{\text{К}}{\text{м}} \cdot h.$$

В градусах Цельсия $t_{\text{р}} = T_{\text{р}} - 273{,}15$:

$$t_{\text{р}}(h) = -270{,}5\ ^\circ\text{C} + 0{,}2675\ \frac{^\circ\text{C}}{\text{м}} \cdot h.$$

Это прямая. Две её точки: $t_{\text{р}} = 0$ при $h = 1011$ м и $t_{\text{р}} = 45\ ^\circ$C при $h = 1180$ м.

4. Пересечения с графиком. Пузырёк на глубине h в равновесии, если температура воды там равна $t_{\text{р}}(h)$. Наносим прямую на график из условия (рис. 2): она пересекает кривую в трёх точках:

$$h_A \approx 1030\ \text{м}, \quad h_B \approx 1110\ \text{м}, \quad h_C \approx 1135\ \text{м}$$

(точность отсчёта по графику — около 10 м). Левее A прямая уходит в отрицательные температуры, правее C — выше 45 °C, других пересече-

ний нет.

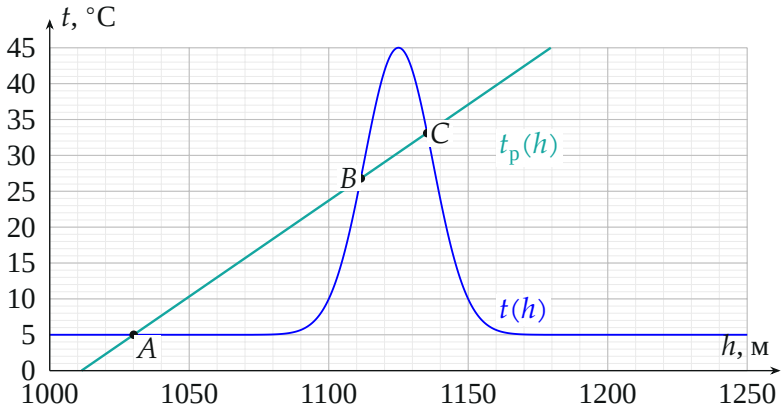


Рис. 2. Синяя кривая — температура воды из условия, бирюзовая прямая — температура, нужная для равновесия. Точки пересечения A, B, C — положения равновесия.

Пункт 2. Устойчивость.

5. Куда идёт сдвинутый пузырёк. Пусть на глубине h вода имеет температуру t, а для равновесия нужна $t_р$. Плотность газа $\rho \propto (p_0 + \rho_в g h)/T$, поэтому:

- кривая выше прямой ($t > t_р$): газ теплее нужного, $\rho < \rho_в$, $F_A > mg$ — пузырёк всплывает (h уменьшается);
- кривая ниже прямой ($t < t_р$): $\rho > \rho_в$ — пузырёк тонет (h растёт).

Изменение объёма пузырька при смещении учтено автоматически: мы сравниваем плотности, а не массы при фиксированном объёме.

6. Точки по очереди (рис. 2 и 3).

- A: чуть выше ($h < h_A$) кривая выше прямой — пузырёк всплывает дальше; чуть глубже прямая выше кривой — тонет дальше. Пузырёк уходит от A в обе стороны: равновесие *неустойчиво*.
- B: между A и B пузырёк тонет, то есть идёт вниз к B; между B и C кривая выше прямой — всплывает, то есть вверх к B. Возвращается с обеих сторон: равновесие *устойчиво*.
- C: чуть выше C пузырёк всплывает к B, чуть глубже C прямая выше кривой — тонет дальше. Равновесие *неустойчиво*.

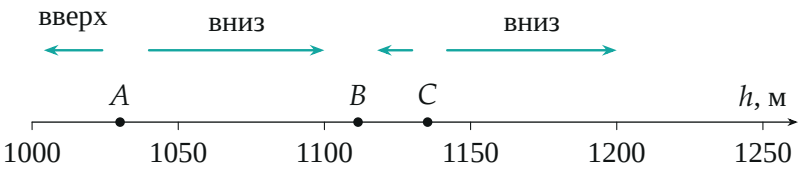


Рис. 3. Куда движется пузырёк на разных глубинах (стрелки — направление смещения). К точке B стрелки сходятся, от A и C — расходятся.

Обратите внимание. Устойчивость решает не «тяжелее — легче» в самой точке (там силы равны), а взаимное расположение кривой и прямой *рядом* с ней: в B с ростом h кривая пересекает прямую снизу вверх (растёт быстрее прямой), в A и C — сверху вниз.

Соберём ответ. Равновесие — при

$$t(h) = t_{\text{р}}(h) = \frac{\mu(p_0 + \rho_{\text{в}} g h)}{R\rho_{\text{в}}} - 273\ ^\circ\text{C};$$

три пересечения: $h_A \approx 1030$ м, $h_B \approx 1110$ м, $h_C \approx 1135$ м.

Проверка. Размерность:

$$\left[\frac{\mu p_0}{R\rho_{\text{в}}}\right] = \frac{\text{кг/моль} \cdot \text{Н/м}^2}{\text{Н} \cdot \text{м/(моль} \cdot \text{К)} \cdot \text{кг/м}^3} = \text{К}, \qquad \left[\frac{\mu g}{R}\right] = \frac{\text{К}}{\text{м}}.$$

Численно: в точке A $t_{\text{р}} = -270{,}5 + 0{,}2675 \cdot 1030 = 5{,}0\ ^\circ\text{C}$ — как раз «фон» холодной воды; в B $t_{\text{р}} = 26{,}4\ ^\circ\text{C}$, в C $33{,}1\ ^\circ\text{C}$ — точки лежат на склонах тёплого слоя. Смысл: в холодной воде на глубине около километра такой тяжёлый газ плотнее воды и тонет, тёплый слой «держит» пузырёк в точке B на своём верхнем склоне.

Ответ. 1) три положения равновесия: $h_A \approx (1030 \pm 10)$ м, $h_B \approx (1110 \pm 10)$ м, $h_C \approx (1135 \pm 10)$ м; 2) в точках A и C равновесие неустойчиво, в точке B — устойчиво.