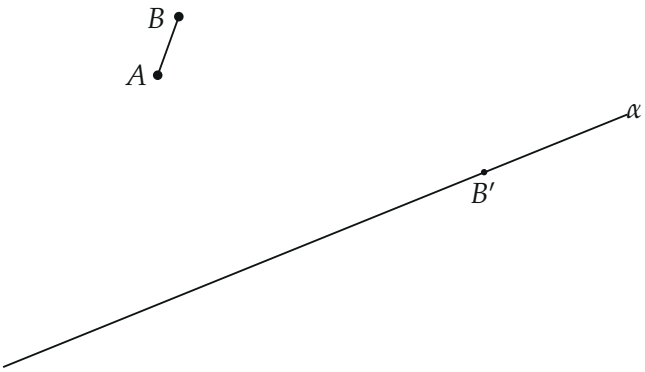
Точно не Снеллиус?

Задача 4. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 10 класс, задача 4] «Точно не Снеллиус?».

Даны светящийся отрезок AB, точка B' — изображение точки B, создаваемое некоторой тонкой линзой, и прямая α, проходящая через точку B' (см. рисунок). Известно, что точка B' лежит в плоскости двойного фокуса линзы, а точка A' (изображение точки A) лежит на прямой α. Для всех возможных ситуаций с помощью циркуля и линейки без делений восстановите:

1. положение оптического центра линзы;
2. положение линзы и положение её главной оптической оси;
3. положение фокусов линзы;
4. положение точки A'.



На отдельном листе приведено два рисунка. Все построения выполняйте на этом листе, опишите их. Метод построения параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам, откладывание равных отрезков и подобные стандартные геометрические процедуры описывать не обязательно.

Считайте, что данная линза любые лучи (даже непараксиальные) преломляет по тем же правилам, что и параксиальные. Параксиальный луч — это луч, идущий под малым углом к главной оптической оси линзы и на малом расстоянии от неё.

Примечание. При сдаче работы лист с рисунками вкладывается в решение участника.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на построение в тонкой линзе по известной паре «точка — изображение». Главных идей две. Первая: луч через оптический центр не преломляется, поэтому O лежит на прямой BB', а где именно — скажет формула линзы, раз B' в плоскости двойного фокуса. Вторая: луч, идущий от B вдоль прямой AB, проходит и через A, значит после линзы он идёт через B' и через A', то есть по прямой α. Точка излома этого луча лежит на линзе.

Обозначения. F — фокусное расстояние, a — расстояние от B до плоскости линзы, b — от линзы до изображения B' (со знаком: $b < 0$ для мнимого изображения); O — оптический центр, L — точка пересечения прямых AB и α.

1. Тип линзы. У рассеивающей линзы изображение действительного предмета всегда мнимое и лежит между линзой и фокальной плоскостью, ближе F к линзе. Плоскость двойного фокуса оно занять не может, значит, линза *собирающая*. Изображение B' может быть действительным или мнимым — два случая.

2. Где B относительно линзы. Формула тонкой собирающей линзы $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{F}$.

- B' действительное: $b = 2F$, тогда $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{F}-\dfrac{1}{2F}$, $a = 2F$. Точки B и B' по разные стороны линзы на равных расстояниях, а O лежит на отрезке BB'; по подобию треугольников $OB = OB'$, O — *середина* BB'.
- B' мнимое: $b = -2F$, тогда $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{F}+\dfrac{1}{2F}$, $a=\dfrac{2F}{3}$. B и B' по одну сторону линзы, B' дальше. Расстояние между их плоскостями $2F-\dfrac{2F}{3}=\dfrac{4F}{3}=2a$, а B, B' и O лежат на одной прямой. По подобию $OB : BB' = a : 2a$, то есть O лежит на продолжении $B'B$ за точку B и $OB=\dfrac{BB'}{2}$.

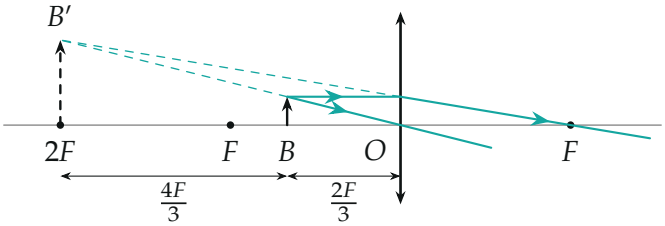


Рис. 1. Мнимое изображение в плоскости двойного фокуса: предмет на расстоянии $2F/3$ от линзы, изображение — на $2F$ с той же стороны. Луч, параллельный оси, идёт через фокус, луч через O не преломляется; их продолжения сходятся в B'. Здесь B изображён стрелкой, чтобы были видны лучи.

Пункт 1. Оптический центр. Случай действительного изображения: делим отрезок BB' пополам — это O. Случай мнимого: делим BB' пополам и откладываем половину от B на продолжении прямой $B'B$ за точку B — это O.

Пункт 2. Линза и главная оптическая ось. Рассмотрим луч, который выходит из B вдоль прямой BA. Он проходит через A, поэтому после линзы проходит (сам или своим продолжением) и через изображение B', и через изображение A'. Обе точки лежат на прямой α, значит, преломлённый луч идёт по α. Падающий луч идёт по прямой AB, преломлённый — по α, точка излома L — их пересечение — лежит на линзе. Строим L, продолжив AB до пересечения с α. Линза — прямая OL; главная оптическая ось — перпендикуляр к OL в точке O.

Пункт 3. Фокусы. Через B' проводим прямую, параллельную линзе (это плоскость двойного фокуса), и отмечаем её пересечение с осью — точку $2F$. Середина отрезка от O до этой точки — фокус F; второй фокус симметричен ему относительно O (на том же расстоянии по другую сторону линзы).

Проверочный способ: луч из B, параллельный оси, после линзы проходит через B' (или продолжением через B' в мнимом случае) и пересекает ось в фокусе — та же точка.

Пункт 4. Точка A'. Луч AO через оптический центр не преломляется, поэтому A' лежит на прямой AO; кроме того, A' лежит на α. A' — пересечение прямых AO и α. В действительном случае A' лежит за линзой на самом луче, в мнимом — на продолжении луча назад.

Рисунки 2 и 3 — построение по данным условия; координаты точек посчитаны, формула линзы для A и A' выполняется с точностью 0,1 %.

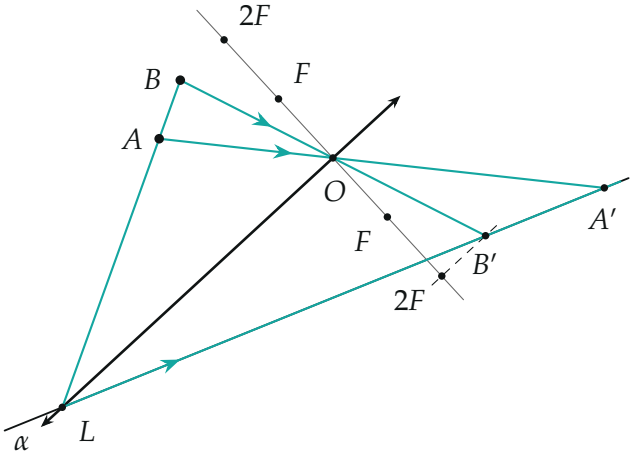


Рис. 2. Случай 1: B' — действительное изображение. O — середина BB', линза — прямая OL (со стрелками), ось — перпендикуляр к ней в O. Пунктир через B' — плоскость двойного фокуса. Бирюзовые — лучи из B и A.

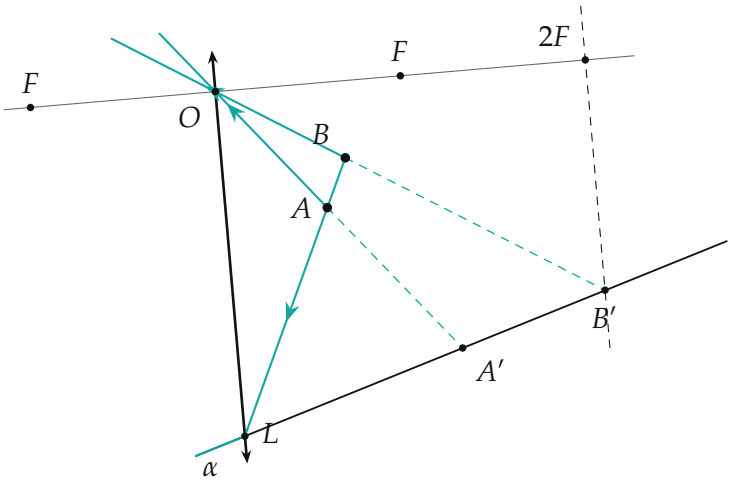


Рис. 3. Случай 2: B' — мнимое изображение. O — на продолжении $B'B$ за B, $OB = BB'/2$. Лучи после линзы расходятся; их продолжения назад (бирюзовый пунктир) проходят через B' и A'.

Обратите внимание. Для мнимого изображения B' «середина BB'» не годится: предмет и изображение по одну сторону линзы, и O лежит вне отрезка BB'. Без этого случая решение неполное.

Проверка. В случае 1 B и B' симметричны относительно O — так и должно быть для пары «$2F$ — $2F$», увеличение -1. В случае 2 увеличение $|b|/a = 2F/(2F/3) = 3$, и в построении $OB' = 3\,OB$. Для точки A по рис. 2: $a = 1{,}64F$, $b = 2{,}56F$, $1/a + 1/b = 0{,}999/F$; по рис. 3: $a = 0{,}547F$, $b = -1{,}209F$, $1/a + 1/b = 1{,}000/F$ — построенная A' действительно изображение A. Смысл: пара «точка — изображение» плюс одно условие на плоскость изображения определяют линзу однозначно, но до выбора «действительное или мнимое» — отсюда два ответа.

Ответ. Линза собирающая, возможны два случая. 1) Если B' действительное, O — середина BB'; если мнимое, O на продолжении $B'B$ за точку B, $OB = BB'/2$. 2) Линза — прямая через O и точку L пересечения прямых AB и α; главная оптическая ось — перпендикуляр к линзе в точке O. 3) Фокус — середина отрезка от O до пересечения оси с прямой через B', параллельной линзе; второй фокус симметричен ему относительно O. 4) A' — пересечение прямых AO и α. Построения — на рис. 2 и 3.