Усилитель

Задача 5. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 10 класс, задача 5] «Усилитель».

В данной задаче рассматривается упрощённый принцип работы трёхконтактного элемента электрической цепи — *полевого транзистора*. Контакты данного элемента называются «исток», «сток» (имеется в виду исток и сток электронов) и «затвор» (см. рис. 1). При этом сила тока через затвор много меньше силы тока, текущего между стоком и истоком.

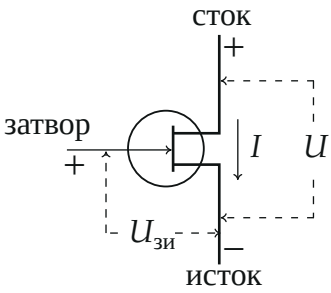

Рис. 1

Вольт-амперная характеристика транзистора, то есть зависимость силы тока I, текущего между стоком и истоком, от напряжения U между ними управляется напряжением $U_{зи}$, созданным между затвором и истоком (полярность подключения, соответствующая положительным значениям U и $U_{зи}$, указана на рис. 1).

В простейшей модели полевого транзистора его вольт-амперная характеристика описывается графиком, который представлен на рис. 2а. При любых положительных напряжениях U между стоком и истоком через транзистор течёт постоянный ток $I_{нас}$, называемый током насыщения. Сила тока насыщения зависит от напряжения $U_{зи}$, созданного между затвором и истоком, так, как показано на рис. 2б.

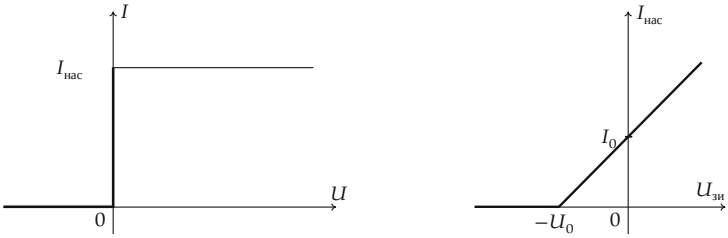

Рис. 2

На основе данного транзистора был собран простейший усилитель, то есть устройство, позволяющее увеличить амплитуду переменного напряжения. Схема такого устройства изображена на рис. 3 (буквами «с» и «и» отмечены, соответственно, сток и исток транзистора).

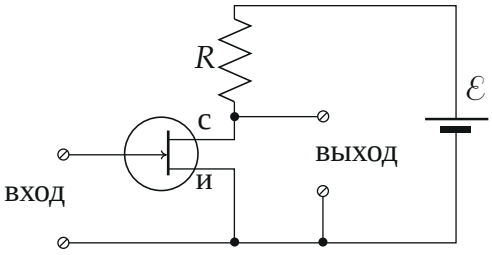

Рис. 3

На вход усилителя подают переменное напряжение синусоидальной формы с амплитудой U_a, зависимость $U_{зи}$ от времени t для которого представлена на рис. 4, при этом определяют напряжение $U(t)$ на выходе.

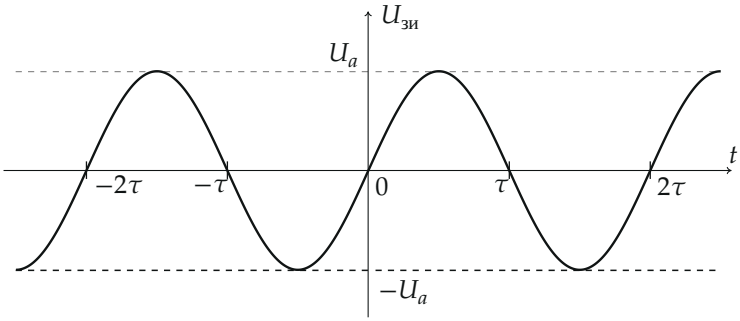

Рис. 4

При решении задачи считайте известными параметры транзистора: $I_0 = 0{,}5$ А, $U_0 = 1$ В, напряжение батареи $\mathcal{E} = 10$ В, а также то, что батарея является идеальной.

Примечание: Амплитудой колебаний называется значение максимального отклонения исследуемой величины от её среднего значения.

1. При каких значениях U_a зависимость напряжения U на выходе усилителя от времени будет иметь форму синусоиды, если сопротивление резистора равно: а) $R = 5$ Ом; б) $R = 16$ Ом?
2. Определите коэффициент усиления K, то есть отношение амплитуды напряжения на выходе усилителя к амплитуде напряжения на входе, если $R = 5$ Ом, и сигнал на входе усилителя имеет синусоидальную форму.
3. Постройте график зависимости выходного напряжения U от времени t, если $U_a = 2$ В и $R = 8$ Ом. Отметьте на графике его основные особенности, укажите ключевые значения напряжений.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на нелинейный элемент в цепи: рабочую точку ищем как пересечение вольт-амперной характеристики транзистора с нагрузочной прямой (закон Ома для цепи «батарея — резистор — транзистор»). Пока транзистор не заперт и не «открыт до упора», через него идёт ток насыщения, линейный по $U_{зи}$, и выходное напряжение — линейная функция входного: синусоида остаётся синусоидой, только больше и перевёрнутая. На краях ($U_{зи} \le -U_0$ или $U = 0$) синусоида обрезается.

Обозначения. I — ток через резистор и транзистор (ток затвора пренебрежимо мал), U — напряжение сток — исток, оно же выходное: выход подключён между стоком и общим проводом, к которому присоединён исток (рис. 3).

1. Нагрузочная прямая. Второе правило Кирхгофа для контура «батарея — резистор — транзистор»:

$$\mathcal{E} = IR + U \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E} - U}{R}.$$

Это прямая на плоскости (U, I) через точки $(0;\ \mathcal{E}/R)$ и $(\mathcal{E};\ 0)$. Рабочая точка — её пересечение с ВАХ транзистора (рис. 5). ВАХ — «ступенька»: вертикальный участок при $U = 0$ (ток любой от 0 до $I_{\text{нас}}$) и горизонтальный $I = I_{\text{нас}}$ при $U > 0$. Возможны два случая:

- $I_{\text{нас}} < \mathcal{E}/R$: пересечение на горизонтальном участке, $I = I_{\text{нас}}$, $U = \mathcal{E} - I_{\text{нас}}R > 0$;
- $I_{\text{нас}} \geq \mathcal{E}/R$: пересечение на вертикальном участке, $U = 0$, $I = \mathcal{E}/R$ — транзистор открыт полностью, ток ограничен резистором.

Значит, всегда $0 \leq U \leq \mathcal{E}$.

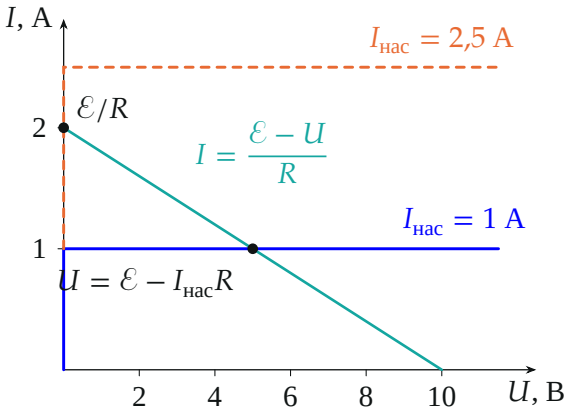

Рис. 5. Нагрузочная прямая (бирюзовая, $R = 5$ Ом) и две ВАХ транзистора. Синяя: $I_{нас} < \mathcal{E}/R$, рабочая точка на горизонтальном участке. Красная: $I_{нас} > \mathcal{E}/R$, рабочая точка при $U = 0$.

2. Выход как функция входа. По рис. 2б ток насыщения при $U_{зи} > -U_0$ — линейная функция: прямая через $(-U_0;\ 0)$ и $(0;\ I_0)$,

$$I_{нас} = \frac{I_0}{U_0}\,(U_{зи} + U_0),$$

а при $U_{зи} \le -U_0$ $I_{нас} = 0$. Пока рабочая точка на горизонтальном участке,

$$U = \mathcal{E} - I_{нас}R = \underbrace{\mathcal{E} - I_0R}_{\text{среднее}} - \underbrace{\frac{I_0R}{U_0}}_{K}\,U_{зи}.$$

Линейная функция переводит синусоиду в синусоиду (сдвиг и растяжение, знак минус — переворот). Линейность нарушается на двух краях (рис. 6):

- $U_{зи} \le -U_0$: $I_{нас} = 0$, ток не идёт, $U = \mathcal{E}$ — транзистор *заперт*;
- $I_{нас} \ge \mathcal{E}/R$, то есть $U_{зи} \ge U_в = U_0\,\dfrac{\mathcal{E} - I_0R}{I_0R}$: $U = 0$.

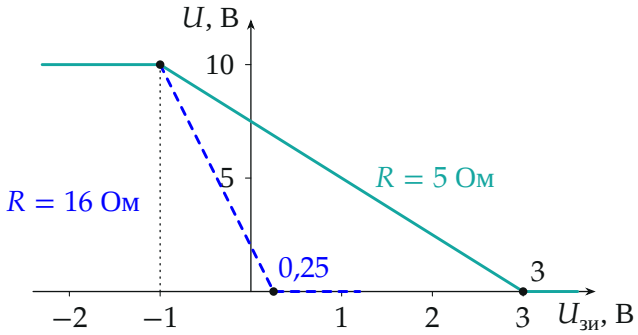

Рис. 6. Выходное напряжение как функция входного. Наклонный участок — линейное усиление; горизонтальные — транзистор заперт ($U = \mathcal{E}$) или открыт полностью ($U = 0$).

Пункт 1. Когда выход — синусоида. Нужно, чтобы вход $U_{зи} \in [-U_a,\ U_a]$ целиком лежал на наклонном участке: $-U_0 \le -U_a$ и $U_a \le U_в$, то есть $U_a \le \min(U_0,\ U_в)$.

а) $R = 5$ Ом: $I_0R = 2{,}5$ В, $U_в = 1\text{ В} \cdot \dfrac{10 - 2{,}5}{2{,}5} = 3$ В. Наклонный участок $-1\text{ В} \leq U_{зи} \leq 3$ В; ограничивает нижний край: $U_a \leq 1$ В.

б) $R = 16$ Ом: $I_0R = 8$ В, $U_в = 1\text{ В} \cdot \dfrac{10 - 8}{8} = 0{,}25$ В. Участок $-1\text{ В} \leq U_{зи} \leq 0{,}25$ В; ограничивает верхний край: $U_a \leq 0{,}25$ В.

Пункт 2. Коэффициент усиления. На наклонном участке амплитуда выхода в $\dfrac{I_0R}{U_0}$ раз больше амплитуды входа:

$$K = \frac{I_0R}{U_0} = \frac{0{,}5 \cdot 5}{1} = 2{,}5.$$

Пункт 3. График при $U_a = 2$ В, $R = 8$ Ом. Здесь $I_0R = 4$ В, $K = 4$, среднее $\mathcal{E} - I_0R = 6$ В, $U_в = 1{,}5$ В. По рис. 4 вход $U_{зи} = U_a \sin(\pi t/\tau)$ (нуль при $t = 0$, растёт, период 2τ). На наклонном участке

$$U = 6\text{ В} - 4U_{зи} = 6\text{ В} - 8\text{ В} \cdot \sin\frac{\pi t}{\tau}.$$

Эта синусоида колебалась бы от -2 В до 14 В (пунктир на рис. 7), но U не выходит из $[0;\ 10\text{ В}]$:

- сверху $U = 10$ В, пока $U_{зи} \leq -1$ В, то есть $\sin(\pi t/\tau) \leq -\frac{1}{2}$: $t \in (\frac{7}{6}\tau;\ \frac{11}{6}\tau)$ (и сдвиги на 2τ), длительность $\frac{2}{3}\tau \approx 0{,}67\tau$;
- снизу $U = 0$, пока $6 - 8\sin(\pi t/\tau) \leq 0$, то есть $\sin(\pi t/\tau) \geq \frac{3}{4}$: $t \in (0{,}27\tau;\ 0{,}73\tau)$ (и сдвиги на 2τ), длительность $0{,}46\tau$.

Особенности графика: $U(N\tau) = 6$ В (N — целое); около $t = 0$ напряжение убывает (вход растёт — выход падает); полки симметричны относительно $t = \pm\tau/2,\ \pm 3\tau/2, \ldots$ — пиков необрезанной синусоиды; верхние полки ($\frac{2}{3}\tau$) длиннее нижних ($0{,}46\tau$).

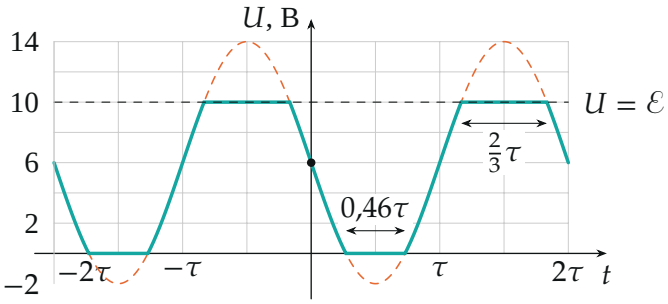

Рис. 7. Выходное напряжение при $U_a = 2$ В, $R = 8$ Ом (бирюзовая линия). Красный пунктир — «необрезанная» синусоида $6-8\sin(\pi t/\tau)$ В. Верхние «полки» $U = 10$ В длиннее нижних $U = 0$.

Обратите внимание. Выход «перевёрнут»: рост входа увеличивает ток и падение напряжения на резисторе, поэтому U на транзисторе падает. И ограничения у входа разные с двух сторон: снизу всегда $-U_0$ (запирание), сверху $U_в$ зависит от R — поэтому при $R = 5$ Ом и $R = 16$ Ом мешают разные края.

Проверка. Размерность: I_0R/U_0 — В/В, безразмерна, как и положено коэффициенту усиления. Предел $R \to 0$: $K \to 0$, $U = \mathcal{E}$ всегда — без резистора выход прямо на батарее, усиления нет. При $R = 8$ Ом и $U_a = 2$ В в точке $t = \tau/2$ (вход 2 В $> U_в = 1{,}5$ В) транзистор открыт полностью, $U = 0$ — график это показывает. Смысл: транзистор превращает малое изменение $U_{зи}$ в большое изменение тока, а резистор — тока в напряжение; усиление тем больше, чем больше R, но тем у́же диапазон входа без искажений.

Ответ. 1) а) $U_a \le 1$ В; б) $U_a \le 0{,}25$ В; 2) $K = I_0R/U_0 = 2{,}5$; 3) $U = 6\text{ В} - 8\text{ В}\cdot\sin(\pi t/\tau)$, обрезанная сверху линией $U = 10$ В (участки длиной $\frac{2}{3}\tau$) и снизу линией $U = 0$ (участки $0{,}46\tau$); $U(N\tau) = 6$ В, около $t = 0$ убывает, верхние горизонтальные участки длиннее нижних (рис. 7).