Крупа в шприце

Задача 1. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 11 класс, практический тур, задача 1] «Крупа в шприце».

Оборудование: шприц 20 мл; пластиковая трубка; крупа в пластиковом стаканчике; мерная лента; канцелярский зажим; штатив с лапкой; 2 листа миллиметровой бумаги для построения графиков; малярный скотч (по требованию); пластиковая ёмкость с водой (воду можно попросить долить); салфетки или бумажные полотенца для поддержания чистоты рабочего места.

Задание. С помощью выданного оборудования измерьте:

1. площадь внутреннего поперечного сечения трубки S и оцените её погрешность ΔS;
2. атмосферное давление $p_{\text{атм}}$.

Достаньте поршень из шприца. Если шприц внутри влажный, то тщательно удалите воду салфеткой. Поместите некоторое количество крупы в этот шприц. Верните поршень на место.

Внимание! Зерна крупы очень быстро намокают и увеличивают свой объём, поэтому их НЕЛЬЗЯ мочить. Решения, допускающие контакт крупы с водой, не будут оцениваться. Дополнительные порции крупы выдаваться не будут.

3. Определите пустотность α крупы, т. е. отношение объёма воздуха между зёрнами к полному (насыпному) объёму, занимаемому крупой: $\alpha = \dfrac{V_{\text{возд}}}{V_{\text{насып}}}$.

Примечание 1. При выполнении работы отдельные компоненты из перечня оборудования можно размещать как на столе, так и на полу.

Примечание 2. Погрешность в задаче требуется оценить только для площади поперечного сечения трубки в пункте 1.

Примечание 3. Плотность воды считайте равной $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Шприц с воздухом соединён трубкой с водой в сосуде. Поднимаем шприц — столб воды в трубке тянет воздух

вниз, давление воздуха падает на $\rho g h$, и воздух расширяется в трубку. Это изотермический процесс (закон Бойля — Мариотта): по тому, насколько расширился воздух при известном перепаде давления, находим $p_{\text{атм}}$, а с крупой — сколько в шприце воздуха. Сечение трубки нужно, чтобы перевести длину воздушного участка в объём. Метод обработки — линеаризация: подбираем координаты, где зависимость — прямая, и берём наклон.

Обозначения. $V_0 = 20$ мл — объём воздуха в шприце (поршень на отметке 20 мл); h — высота столба воды в трубке над поверхностью воды в сосуде; l — длина участка трубки, занятого воздухом; $V_{\text{насып}} = 20$ мл — насыпной объём крупы. Измерения ниже — данные организаторов.

Пункт 1. Сечение трубки. Набираем в шприц воду и выдавливаем $V = 14$ мл в трубку без пузырей, измеряем длину водяного столба L (рис. 2). Три измерения: 111,4; 111,5; 111,0 см, $L_{\text{ср}} = 111{,}3$ см. Объём цилиндра $V = SL$:

$$S = \frac{V}{L_{\text{ср}}} = \frac{14\ \text{см}^3}{111{,}3\ \text{см}} = 0{,}126\ \text{см}^2 = 12{,}6\ \text{мм}^2.$$

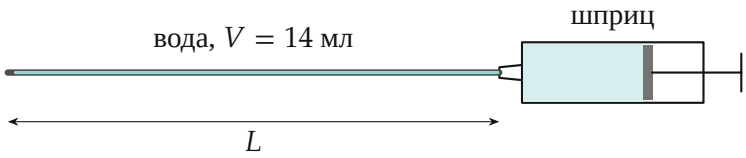

Рис. 2. Измерение сечения: 14 мл воды из шприца занимают в трубке длину L.

Погрешность. Длина: случайная $\Delta L_{\text{случ}} = \frac{1}{n}\sum |L_i - L_{\text{ср}}| \approx 2$ мм, систематическая (лента, выпрямление трубки) ≈ 2 мм, вместе $\Delta L = \sqrt{2^2 + 2^2} \approx 3$ мм, $\varepsilon_L = 0{,}3\,\%$. Объём — половина цены деления шприца, $\Delta V = 0{,}5$ мл, $\varepsilon_V = 0{,}5/14 = 3{,}6\,\%$. Для частного относительные погрешности складываются квадратично, и $\varepsilon_V \gg \varepsilon_L$, поэтому $\varepsilon_S \approx \varepsilon_V$:

$$\Delta S = \varepsilon_S S \approx 0{,}036 \cdot 12{,}6 \approx 0{,}5\ \text{мм}^2, \qquad S = (12{,}6 \pm 0{,}5)\ \text{мм}^2.$$

Пункт 2. Атмосферное давление. Установка — рис. 3: лента вертикально от лапки штатива до пола, сосуд с водой на полу, нижний конец заполненной водой трубки — под водой. Поршень пустого шприца ставим на $V_0 = 20$ мл и присоединяем трубку. Поднимаем шприц вдоль ленты и записываем h и l. Держим шприц за верх корпуса, чтобы не нагреть воздух рукой: температура постоянна.

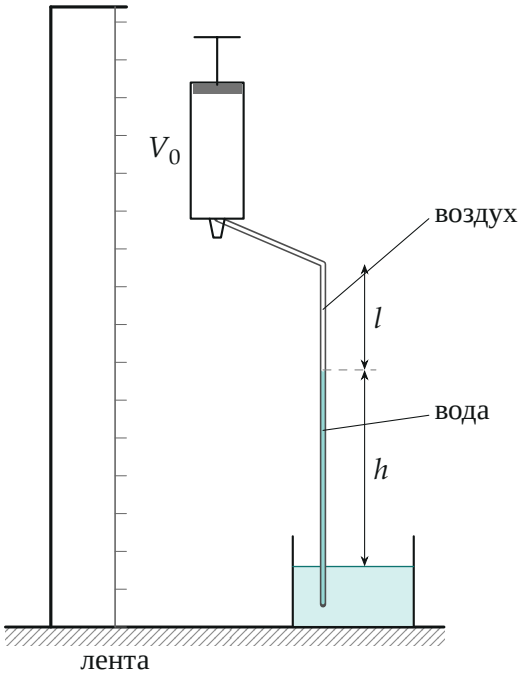

Рис. 3. Установка: шприц поднят, вода в трубке стоит на высоте h над водой в сосуде, воздух из шприца занял участок трубки длины l.

Условие равновесия столба воды: давление воздуха над столбом $p = p_{\text{атм}} - \rho g h$. Закон Бойля — Мариотта для воздуха шприца (было $p_{\text{атм}}$, V_0; стало p, $V_0 + Sl$):

$$p_{\text{атм}} V_0 = (p_{\text{атм}} - \rho g h)(V_0 + Sl)$$

$$\rho g h = p_{\text{атм}} \frac{Sl}{V_0 + Sl} = p_{\text{атм}} Y, \qquad Y \equiv \frac{Sl}{V_0 + Sl}. \tag{1}$$

В координатах $(Y;\ \rho gh)$ это прямая с наклоном $p_{\text{атм}}$. При стыковке шприца с трубкой давление и объём чуть сдвигаются, поэтому прямая может не проходить через начало — берём только наклон.

h, см	7,1	15,6	24,4	32,8	41,3
l, см	2,9	4,4	5,6	7,2	8,7
Y	0,018	0,027	0,034	0,043	0,052
ρgh, кПа	0,70	1,53	2,39	3,21	4,05
h, см	49,5	57,9	66,3	74,9	83,5
l, см	10,5	12,1	13,7	15,1	16,5
Y	0,062	0,071	0,079	0,087	0,094
ρgh, кПа	4,85	5,67	6,50	7,34	8,18

Точки ложатся на прямую (рис. 4); наклон по методу наименьших квадратов (python)

$$p_{\text{атм}} \approx 96 \text{ кПа}.$$

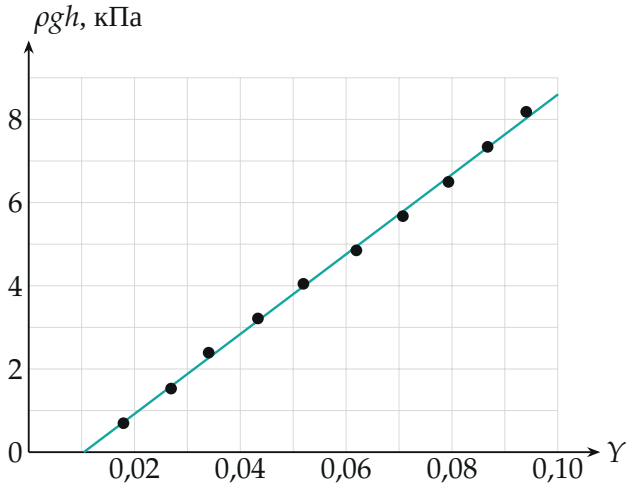

Рис. 4. Зависимость ρgh от $Y = Sl/(V_0 + Sl)$; наклон прямой — $p_{атм} \approx 96$ кПа.

Пункт 3. Пустотность крупы. Засыпаем в сухой шприц $V_{\text{насып}} = 20$ мл крупы (чем больше, тем больше воздуха и точнее опыт), утрясаем

и прижимаем поршнем. Вода к крупе не попадает: она остаётся в трубке. Опыт тот же, но воздуха в шприце теперь $V_{\text{возд}} = \alpha V_{\text{насып}}$. Закон Бойля — Мариотта:

$$p_{\text{атм}}\,\alpha V_{\text{насып}} = (p_{\text{атм}} - \rho g h)(\alpha V_{\text{насып}} + Sl)$$

$$l = \alpha\,\frac{\rho g h\, V_{\text{насып}}}{S\,(p_{\text{атм}} - \rho g h)} = \alpha X. \qquad (2)$$

В координатах $(X;\ l)$ — прямая с наклоном α; $p_{\text{атм}} = 96$ кПа берём из пункта 2.

h, см	8,1	17,3	26,6	35,6	44,8
l, см	1,9	2,7	3,4	4,4	5,2
X, см	1,33	2,86	4,44	5,99	7,62
h, см	54,0	63,6	72,3	81,6	90,8
l, см	6,0	6,4	7,7	8,4	9,2
X, см	9,27	11,04	12,67	14,44	16,24

Наклон прямой (рис. 5, метод наименьших квадратов):

$$\alpha \approx 0{,}49.$$

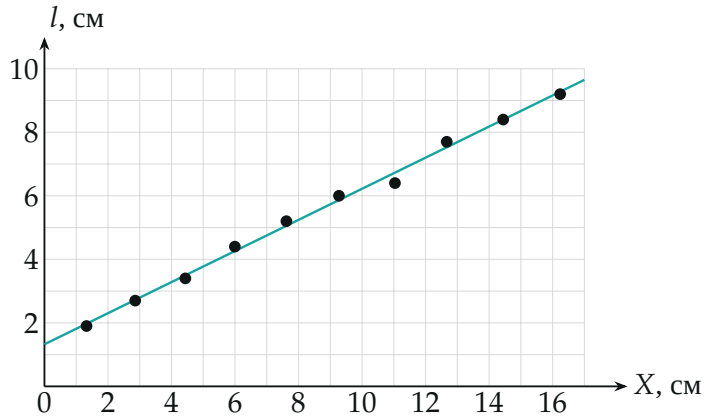

Рис. 5. Зависимость l от $X = \rho g h V_{насып}/(S(p_{атм} - \rho g h))$; наклон — пустотность $\alpha \approx 0{,}49$.

Обратите внимание. Строить надо наклон, а не делить одну пару l/X: смещение начала (сдвиг давления и объёма при стыковке шприца с трубкой) входит в каждую точку одинаково и в наклон не попадает.

Проверка. Размерность: Y безразмерно, $[\rho g h] = $ Па — наклон (1) в паскалях; X — объём, делённый на площадь, — длина, наклон (2) безразмерен. Разумность: 96 кПа — нормальное давление ($\approx$ 720 мм рт. ст.); пустотность 0,49 — почти половина насыпного объёма — воздух, обычное значение для сыпучей крупы (у плотной упаковки шаров 0,26–0,48). Оценка одной точкой: $h = 83{,}5$ см, $l = 16{,}5$ см — из (1) $p_{\text{атм}} = \rho g h / Y = 8{,}18/0{,}094 \approx 87$ кПа, а с поправкой на смещение 1,0 кПа — $(8{,}18 + 1{,}0)/0{,}094 \approx 98$ кПа: без графика ошибка до 10 %.

Ответ. 1) $S = (12{,}6 \pm 0{,}5)$ мм^2; 2) $p_{\text{атм}} \approx 96$ кПа; 3) $\alpha \approx 0{,}49$.