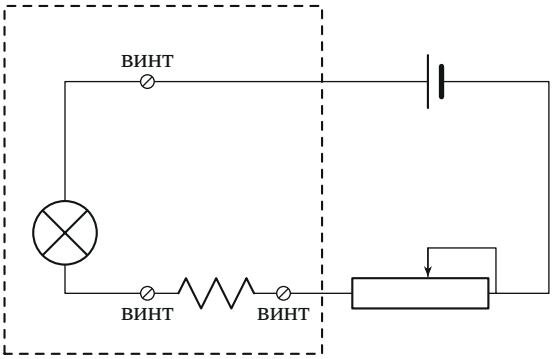
Лампочка — гори!

Задача 2. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 11 класс, практический тур, задача 2] «Лампочка — гори!».

Оборудование: комплект для измерений с лампочкой, тремя контактами и выведенными наружу переменным резистором и колодкой для батарейки (схема соединения изображена на рисунке); батарейка; мультиметр (в режиме вольтметра и омметра) с щупами; три листа миллиметровой бумаги для построения графиков.

Задание. Внутри лампы накаливания находится нить, сделанная из вольфрама — тугоплавкого металла, удельное сопротивление ρ которого сильно зависит от его температуры T (см. таблицу). Для проведения необходимых измерений используйте выданный Вам комплект, состоящий из последовательно соединённых между собой элементов: лампы накаливания, постоянного резистора, переменного резистора и батарейки. При расчётах считайте, что комнатная температура равна 300 K, а тепловым расширением вольфрама можно пренебречь.



Комплект для измерений не разбирать! Горящую лампу руками не трогать! Во избежание разряда батарейки не держите цепь замкнутой, когда не производите измерений! Режимом амперметра пользоваться запрещено! Перед измерениями в режиме омметра необходимо отсоединить от цепи батарейку! В данной задаче расчёт погрешностей требует-

ся только в последнем пункте.

T, К	300	500	700	900	1100	1300	1500
ρ, 10^{-8} Ом · м	5,65	10,48	15,75	21,35	27,23	33,29	39,50
T, К	1700	1900	2100	2300	2500	2700	2900
ρ, 10^{-8} Ом · м	45,88	52,40	59,05	65,82	72,71	79,71	86,81

1. Основываясь на приведённой таблице, постройте график зависимости ρ/ρ_0 от температуры нити T, где ρ — удельное сопротивление вольфрама при температуре T, ρ_0 — его удельное сопротивление при комнатной температуре T_0.
2. Найдите сопротивление «холодной» лампы (сопротивление при комнатной температуре).
3. Экспериментально получите зависимость мощности P, выделяемой на лампе, от температуры вольфрамовой нити T, сняв не менее 15 точек. Занесите результаты прямых измерений и расчётов в таблицу.
4. Предполагая, что при больших температурах ($T \geqslant 800$ К) характер зависимости $P(T)$ имеет вид $P \sim T^n$, где n — целое число, определите величину n. Постройте график этой зависимости в таких координатах, где она имеет линейный вид.
5. Определите площадь излучающей поверхности нити накаливания лампы, используя данные справочника: вольфрамовая пластина площадью 1 см^2 при температуре 2000 К излучает мощность 22,5 Вт (суммарно по всем частотам). Считайте, что вся потребляемая лампой мощность уходит на излучение. Оцените погрешность результата.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Нить лампы — и нагреватель, и термометр: её сопротивление однозначно говорит о температуре (размеры нити не меняются, поэтому $R/R_0 = \rho/\rho_0$). Амперметр запрещён, но ток даёт вольтметр на известном резисторе r, включённом последовательно. Меняя реостатом ток, получаем пары «мощность — температура» и ищем степенной закон: в логарифмических координатах он — прямая, наклон — показатель. При высокой температуре нить теряет энергию

излучением ($P \propto T^4$, закон Стефана — Больцмана), площадь излучающей поверхности — из сравнения со справочной пластиной.

Обозначения. R_0 — сопротивление холодной лампы, $R_л$ — горящей; r — постоянный резистор; $U_л$, U_r — напряжения на лампе и на резисторе; I — ток. Измерения — данные организаторов.

Пункт 1. График ρ/ρ_0. Делим каждое значение таблицы на $\rho_0 = 5{,}65 \cdot 10^{-8}$ Ом·м (при $T_0 = 300$ К):

T, К	300	500	700	900	1100	1300	1500
ρ/ρ_0	1,00	1,85	2,79	3,78	4,82	5,89	6,99
T, К	1700	1900	2100	2300	2500	2700	2900
ρ/ρ_0	8,12	9,27	10,45	11,65	12,87	14,11	15,36

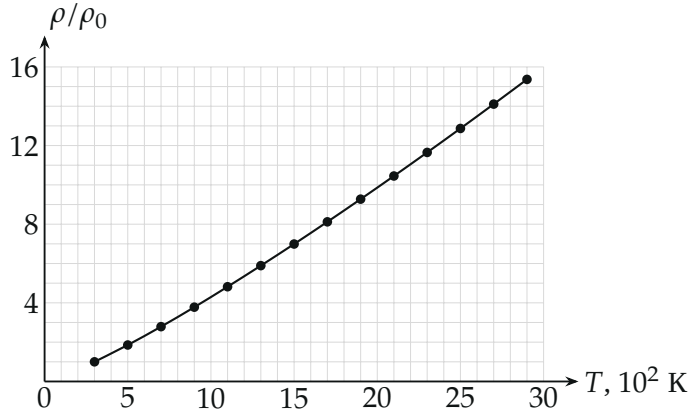


Рис. 2. Градуировочный график $\rho/\rho_0(T)$ — по нему температура нити находится по отношению $R_л/R_0$.

Пункт 2. Холодная лампа. Отсоединяем батарейку и омметром измеряем сопротивление лампы между её винтами: ток омметра мал и нить не греет, поэтому это сопротивление при комнатной температуре:

$$R_0 = 34{,}0 \text{ Ом}.$$

Так же измеряем постоянный резистор: $r = 81{,}3$ Ом.

Пункт 3. Мощность и температура. Ставим реостат на максимум, вставляем батарейку и, уменьшая сопротивление реостата, вольтметром измеряем $U_л$ и U_r. Лампа и резистор соединены последовательно — ток один, $I = U_r/r$ (закон Ома для резистора). Тогда

$$P = U_л I = \frac{U_л U_r}{r}, \qquad \frac{R_л}{R_0} = \frac{U_л}{IR_0} = \frac{U_л}{U_r} \cdot \frac{r}{R_0},$$

а T находим по графику рис. 2, где $\rho/\rho_0 = R_л/R_0$:

$U_л$, В	0,07	0,10	0,14	0,18	0,22	0,35
U_r, мВ	161	207	265	300	335	400
P, мВт	0,14	0,25	0,46	0,66	0,91	1,72
$R_л/R_0$	1,04	1,16	1,26	1,43	1,57	2,09
T, К	310	340	360	400	430	550
$U_л$, В	0,52	0,87	1,29	1,85	2,31	3,16
U_r, мВ	462	572	692	836	944	1120
P, мВт	2,95	6,12	10,98	19,02	26,82	43,53
$R_л/R_0$	2,69	3,64	4,46	5,29	5,85	6,75
T, К	680	870	1030	1190	1290	1460
$U_л$, В	4,08	4,77	5,44	6,20	6,82	7,07
U_r, мВ	1289	1409	1515	1624	1704	1744
P, мВт	64,69	82,67	101,4	123,8	142,9	151,7
$R_л/R_0$	7,57	8,10	8,59	9,13	9,57	9,69
T, К	1600	1690	1780	1870	1940	1960

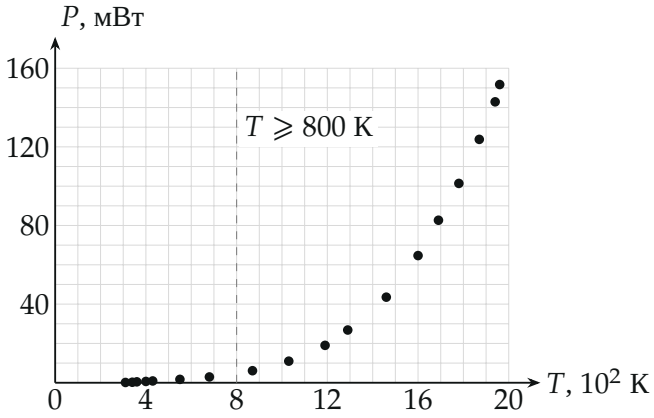


Рис. 3. Мощность лампы $P(T)$ по 18 измерениям — растёт много быстрее, чем линейно.

Пункт 4. Показатель n. Если $P = AT^n$, то $\ln P = n \ln T + \ln A$ — в осях $(\ln T;\ \ln P)$ прямая с наклоном n; единицы T и P сдвигают её, но не меняют наклон. Берём 11 точек с $T \geqslant 800$ K (рис. 4); метод наименьших квадратов (python) даёт наклон 4,01:

$$n = 4.$$

Второй способ — по парам точек: $T_1 = 1960$ K и $T_2 = 1600$ K, $\dfrac{T_1}{T_2} = 1{,}225$, $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{151{,}7}{64{,}69} = 2{,}35$; из $n = 2, 4, 6$ ближе всего $1{,}225^4 = 2{,}25$. Пары 1690 и 1780 K дают то же. Линейный вид — и график P от T^4 (рис. 5): точки ложатся на прямую через начало координат.

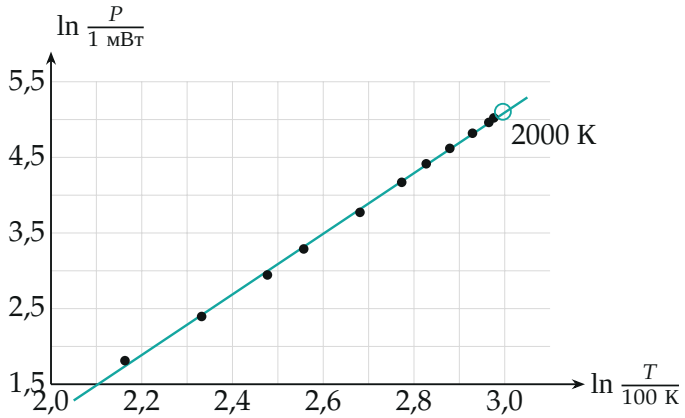


Рис. 4. $\ln P$ *от* $\ln T$ *при* $T \geqslant 800$ *K: прямая с наклоном* $n = 4{,}0$*; кружок — продолжение до* $T = 2000$ *K.*

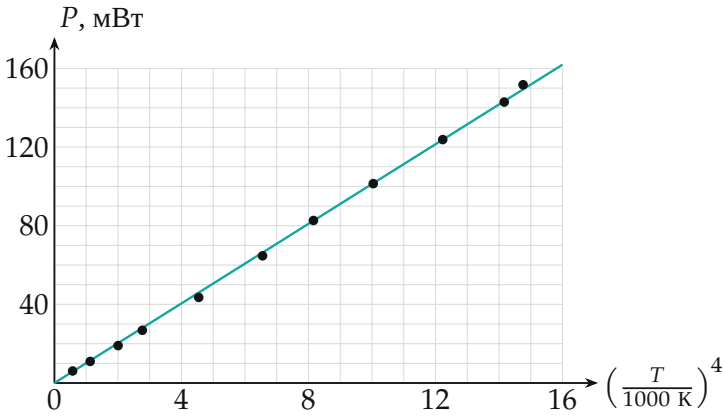


Рис. 5. Та же зависимость в осях P *—* T^4*: прямая через начало.*

Пункт 5. Площадь излучения. Температура 2000 K чуть выше последней точки (1960 K). При $n = 4$ продолжаем от ближайшей точки:

$$P(2000\text{ K}) = P_1\left(\frac{2000}{1960}\right)^4 = 151{,}7 \cdot 1{,}084 \approx 164\text{ мВт}.$$

Излучаемая мощность пропорциональна площади, а пластина 1 см^2 при

той же температуре излучает 22,5 Вт, поэтому

$$S = \frac{P}{22{,}5\ \text{Вт/см}^2} = \frac{0{,}164}{22{,}5}\ \text{см}^2 \approx 7{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{см}^2 = 0{,}73\ \text{мм}^2.$$

Погрешность. Разброс точек вокруг прямой рис. 4 — $\Delta \ln P \approx 0{,}03$, то есть 3 %; температура читается по графику рис. 2 с точностью ≈ 10 K, и в $P \propto T^4$ это ещё $4 \cdot 10/2000 = 2\,\%$; с погрешностью прибора всего $\varepsilon_P \approx 5\,\%$. Так как $S \propto P$, $\varepsilon_S = \varepsilon_P$:

$$\Delta S \approx 0{,}05 \cdot 0{,}73 \approx 0{,}04\ \text{мм}^2, \qquad S = (0{,}73 \pm 0{,}04)\ \text{мм}^2.$$

Прямая через начало на рис. 5 даёт $P(2000\ \text{K}) = 162$ мВт и $S = 0{,}72\ \text{мм}^2$ — в пределах погрешности.

Обратите внимание. При низких температурах ($T < 800$ K) закон T^4 не работает: там нить остывает в основном теплопроводностью, и P растёт примерно как $T - T_0$. Поэтому показатель ищем только по горячим точкам.

Проверка. Размерность: $\text{Вт}/(\text{Вт/см}^2) = \text{см}^2$. Порядок: нить диаметром ≈ 20 мкм и длиной ≈ 1 см имеет боковую поверхность $\pi \cdot 0{,}02 \cdot 10 \approx 0{,}6\ \text{мм}^2$ — того же порядка, что $0{,}73\ \text{мм}^2$. Показатель 4 — закон Стефана — Больцмана, как и должно быть у излучающего тела.

Ответ. 1) график $\rho/\rho_0(T)$ — рис. 2; 2) $R_0 = 34{,}0$ Ом; 3) таблица и график $P(T)$ — рис. 3; 4) $n = 4$, линейный вид — $\ln P(\ln T)$ или $P(T^4)$; 5) $S = (0{,}73 \pm 0{,}04)\ \text{мм}^2$.