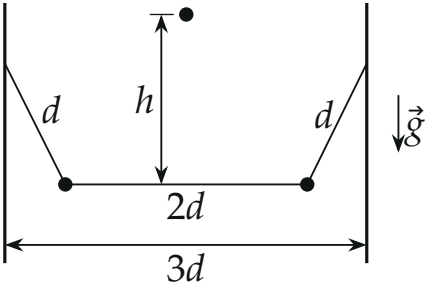
Зацепился

Задача 1. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 11 класс, задача 1] «Зацепился».

Два тяжелых маленьких шарика массами m закреплены с помощью трех невесомых, нерастяжимых нитей между двумя вертикальными стенками в поле тяжести. Расстояние между стенками $3d$, длины нитей, прикрепленных к стенкам равны d, длина нити между шариками $2d$. С высоты h, отсчитывая от середины горизонтальной нити, падает еще один такой же шарик, к которому прикреплен крючок. Пролетая рядом с горизонтальной нитью, шарик зацепляется за нее крючком. Определите силы натяжения нитей в этот момент. Ускорение свободного падения равно g.



▲ **Решение. Что происходит.** В момент зацепления нити ещё не успели сдвинуться, но средний шарик уже летит вниз со скоростью v, а боковые покоятся. Натяжения скачком становятся такими, чтобы боковые шарики начали «догонять» средний. Это задача на связи: ускорение бокового шарика найдём из кинематики нерастяжимых нитей (в системе отсчёта среднего шарика боковой идёт по окружности), а натяжения — из второго закона Ньютона.

Обозначения (рис. 2). Шарики 1 и 2 — левый и правый, 3 — средний (с крючком). T_1 — натяжение боковых нитей, T_2 — натяжение каждой половины горизонтальной нити; $\vec{a}$ — ускорение левого шарика в этот момент. Ось x — вправо вдоль горизонтальной нити, ось y — вверх.

1. Геометрия. Горизонтальная проекция боковой нити $(3d - 2d)/2 = d/2$, её длина d, поэтому боковая нить составляет с горизонталью угол $60°$ (с вертикалью — $30°$).

2. Скорости в момент зацепления. Шарик 3 пролетел высоту h свободно, по закону сохранения энергии

$$v = \sqrt{2gh} \quad \text{(вниз)}.$$

После зацепления шарик 3 сидит на середине нити: от него к каждому боковому шарику идёт нить длины d. Нерастяжимость: проекции скоростей концов нити на саму нить равны. Скорость шарика 3 перпендикулярна горизонтальной нити, её проекция нулевая, значит, и у шарика 1 проекция скорости на горизонталь $v_1 \cos 30^\circ = 0$. Шарик 1 может двигаться только по окружности вокруг точки подвеса, скорость направлена по касательной под 30° к горизонтали, — отсюда $v_1 = 0$: боковые шарики в этот момент покоятся.

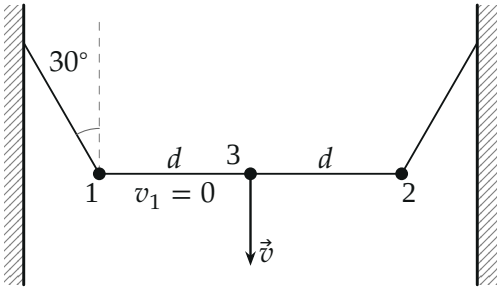


Рис. 2. Момент зацепления: шарик 3 на середине нити летит вниз со скоростью v, шарики 1 и 2 ещё покоятся.

3. Ускорение бокового шарика. Шарик 1 идёт по окружности радиуса d вокруг точки подвеса. Его скорость равна нулю, значит, нормальное (центростремительное) ускорение $v_1^2/d = 0$, и ускорение $\vec{a}$ направлено по касательной: под 30° к горизонтали, вправо-вверх (рис. 4).

Модуль a найдём, перейдя в систему отсчёта, движущуюся поступательно вниз с постоянной скоростью $\vec{v}$, — она инерциальна, ускорения в ней те же. В этот момент шарик 3 в ней покоится, а шарик 1 движется вверх со скоростью v (рис. 3). Расстояние между ними — длина нити d, поэтому шарик 1 идёт по окружности радиуса d вокруг шарика 3, и

проекция его ускорения на нить, к шарику 3, — центростремительная:

$$a_x^{\text{отн}} = \frac{v^2}{d}.$$

Ускорение шарика 3 вертикально (на него действуют $m\vec{g}$ и две горизонтальные силы T_2, которые гасят друг друга), его проекция на горизонталь нулевая, поэтому $a_x = a_x^{\text{отн}}$, и

$$a\cos 30^\circ = \frac{v^2}{d} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2v^2}{\sqrt{3}\,d}.$$

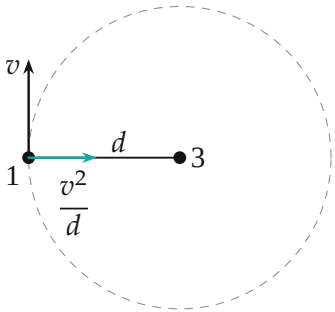


Рис. 3. В системе отсчёта, движущейся вниз со скоростью v: шарик 3 покоится, шарик 1 идёт вверх по окружности радиуса d вокруг него.

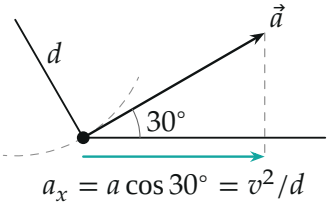


Рис. 4. Ускорение шарика 1 направлено по касательной к его окружности (пунктир) — под 30° к горизонтали; его проекция на горизонтальную нить равна v^2/d.

4. Второй закон Ньютона для шарика 1 (рис. 5): $m\vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g}$. Нить к стенке тянет шарик вдоль себя — влево-вверх под 60° к горизонтали, горизонтальная нить — вправо. Проекции на оси, $a_x = a\cos 30^\circ = v^2/d$, $a_y = a\sin 30^\circ = v^2/(\sqrt{3}\,d)$:

$$\begin{cases} x:\ T_2 - T_1\cos 60^\circ = m\dfrac{v^2}{d}, \\ y:\ T_1\sin 60^\circ - mg = m\dfrac{v^2}{\sqrt{3}\,d}. \end{cases}$$

Из второго уравнения, затем из первого:

$$T_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(mg + \frac{mv^2}{\sqrt{3}\,d}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}mg + \frac{2mv^2}{3d},$$

$$T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{mv^2}{d} = \frac{\sqrt{3}}{3}mg + \frac{4mv^2}{3d}.$$

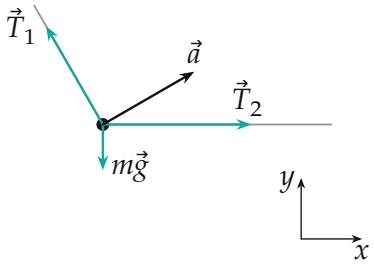


Рис. 5. Силы на шарик 1 и его ускорение. Длины стрелок — при $h = d$: $T_1 \approx 2{,}5\,mg$, $T_2 \approx 3{,}2\,mg$.

5. Ответ. Подставляем $v^2 = 2gh$:

$$T_1 = \frac{mg}{3}\left(2\sqrt{3} + 4\frac{h}{d}\right), \qquad T_2 = \frac{mg}{3}\left(\sqrt{3} + 8\frac{h}{d}\right).$$

Второй способ для ускорения. В неинерциальной системе отсчёта шарика 1 на шарик 3 действует ещё сила инерции $-m\vec{a}$, а шарик 3 движется относительно шарика 1 по окружности радиуса d со скоростью v.

Второй закон Ньютона для шарика 3 в проекции на нить, к шарику 1: натяжения двух половин нити гасят друг друга, $m\vec{g}$ на нить не проецируется, остаётся проекция силы инерции $ma\cos 30°$. Она и даёт центростремительное ускорение: $mv^2/d = ma\cos 30°$ — тот же результат.

Обратите внимание. Скорость боковых шариков в этот момент нулевая, а ускорение — нет: оно направлено по касательной к их окружности, а не вдоль нити. Записать «центростремительное ускорение v^2/d вдоль горизонтальной нити» можно только для относительного движения шарика 1 вокруг шарика 3.

Проверка. Размерность: mv^2/d — сила. Предел $h \to 0$: $T_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}mg$, $T_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}mg$ — это равновесие до падения ($T_1 \sin 60° = mg$, $T_2 = T_1 \cos 60°$). Средний шарик: на него действует только $m\vec{g}$ вниз, горизонтальные натяжения уравновешены — он продолжает разгоняться с ускорением g, как и должен в первый момент: нить вдоль своей длины на него не тянет. Смысл: чем быстрее падает шарик, тем сильнее рывок — вклад h/d в T_2 вдвое больше, чем в T_1.

Ответ. $T_1 = \frac{mg}{3}\left(2\sqrt{3} + 4\frac{h}{d}\right)$ — боковые нити, $T_2 = \frac{mg}{3}\left(\sqrt{3} + 8\frac{h}{d}\right)$ — горизонтальная нить.