Больше или меньше

Задача 2. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 11 класс, задача 2] «Больше или меньше».

Рассмотрим два процесса A и B, в каждом из которых ν молей идеального одноатомного газа квазистатически переводят из состояния 1 с объёмом V и температурой T в состояние 2 с объёмом $2V$ и температурой $2T$ так, что в течение всего процесса температура газа не уменьшается и тепло от газа не отводится. При этом процесс A осуществляется таким образом, что количество теплоты, которое подводят к газу, оказывается максимально возможным при выполнении данных условий, а в процессе B количество теплоты оказывается минимальным. Определите:

1. максимальные $V_A^{\max}$, $V_B^{\max}$ и минимальные $V_A^{\min}$, $V_B^{\min}$ значения объёмов газа в каждом из этих процессов,
2. количество теплоты Q_A и Q_B, подведенное в каждом процессе.

▲ **Решение. Что происходит.** Оба условия — «температура не убывает» и «тепло не отводится» — удобно записать на языке энтропии: квазистатически $\delta Q = T\,dS$, и $\delta Q \geqslant 0$ значит $dS \geqslant 0$. Процесс — это путь, на котором T и S обе не убывают. Теплота — площадь под путём в осях T–S, а её крайние значения дают «прямоугольные» пути: сначала адиабата, потом изотерма — или наоборот. Класс задачи — экстремум теплоты при ограничениях, решается диаграммой TS.

Обозначения. S_1, S_2 — энтропии состояний 1 и 2; $\gamma = 5/3$ — показатель адиабаты одноатомного газа; 3 — состояние на адиабате состояния 1 с температурой $2T$; 4 — состояние на изотерме T и адиабате состояния 2.

1. Где может лежать процесс на pV-диаграмме. Через каждую точку проходит одна изотерма и одна адиабата; выше лежат изотермы с большей температурой и адиабаты с большей энтропией. Температура не убывает — путь не уходит ниже изотермы T и выше изотермы $2T$; тепло не отводится — путь не переходит на более «низкую» адиабату, то есть лежит между адиабатами S_1 и S_2. Допустимая область — криволинейный четырёхугольник 1–3–2–4 (рис. 1).

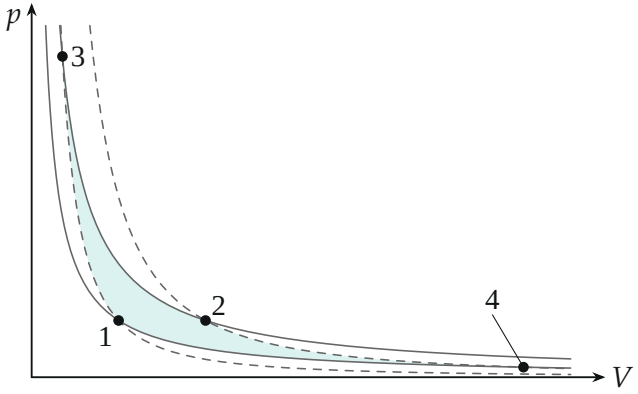

Рис. 1. Изотермы T (нижняя сплошная, через 1 и 4) и $2T$ (через 3 и 2), адиабаты S_1 (пунктир через 1 и 3) и S_2 (через 4 и 2); цветом — область, где может проходить процесс. Построено по формулам $p \propto 1/V$ и $p \propto V^{-5/3}$.

2. Теплота как площадь. Для квазистатического процесса $\delta Q = T\,dS$. На любом допустимом пути (рис. 2) T растёт от T до $2T$, а S — от S_1 до S_2, поэтому

$$T\,(S_2 - S_1) \leqslant Q = \int_{S_1}^{S_2} T\,dS \leqslant 2T\,(S_2 - S_1).$$

Верхняя граница достигается, если всё тепло подводится при $T = 2T$: сначала без теплообмена поднять температуру до $2T$ (адиабата $1 \to 3$), затем изотермически расширить до состояния 2. Это процесс A. Нижняя — если всё тепло подводится при T: изотерма $1 \to 4$, затем адиабата $4 \to 2$. Это процесс B (рис. 3, 4).

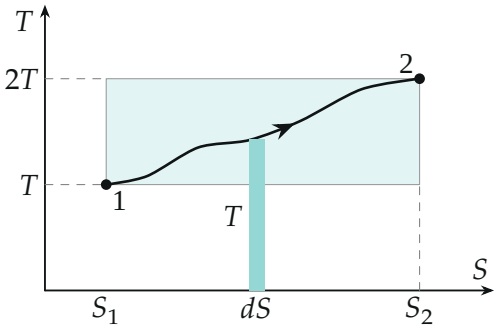

Рис. 2. Любой допустимый процесс в осях T–S — неубывающая кривая внутри прямоугольника; теплота — площадь под ней, полоска T dS.

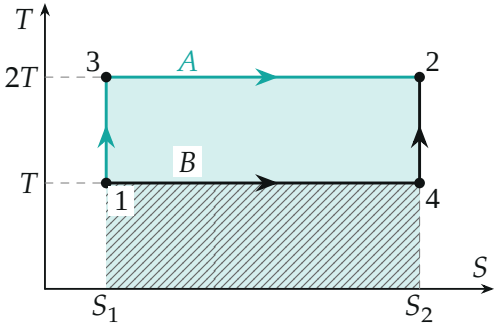

Рис. 3. Процессы A (1 → 3 → 2) и B (1 → 4 → 2) в осях T–S: Q_A — вся закрашенная площадь, Q_B — заштрихованная.

3. Изменение энтропии. Для идеального одноатомного газа $S = \nu R(\frac{3}{2}\ln T + \ln V) + \text{const}$, поэтому

$$S_2 - S_1 = \nu R\Big(\frac{3}{2}\ln 2 + \ln 2\Big) = \frac{5}{2}\,\nu R \ln 2.$$

4. Объёмы в процессе A**.** Адиабата 1 → 3 сжимает газ: $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, $TV^{2/3} = \text{const}$:

$$T\,V^{2/3} = 2T\,V_3^{2/3} \quad \Rightarrow \quad V_3 = \frac{V}{2^{3/2}} = \frac{V}{2\sqrt{2}}.$$

Дальше изотерма 3 → 2 — объём растёт до $2V$. Значит, $V_A^{\min} = \dfrac{V}{2\sqrt{2}}$, $V_A^{\max} = 2V$.

5. Объёмы в процессе B**.** Изотерма 1 → 4 расширяет газ, адиабата 4 → 2 сжимает: $2T\,(2V)^{2/3} = T\,V_4^{2/3}$, откуда

$$V_4 = 2^{3/2}\cdot 2V = 4\sqrt{2}\,V.$$

Значит, $V_B^{\min} = V$, $V_B^{\max} = 4\sqrt{2}\,V$ (рис. 4).

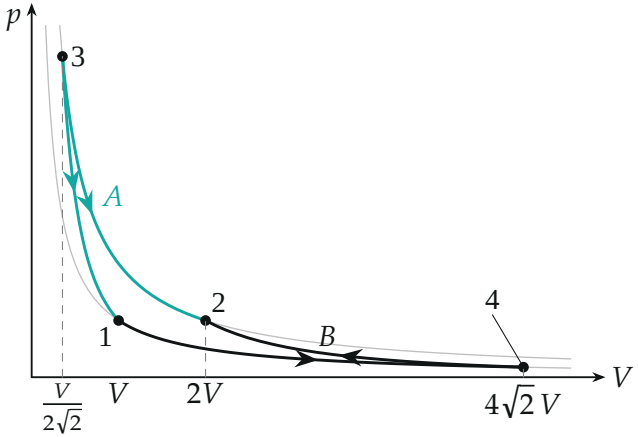

Рис. 4. Процессы A (бирюзовый) и B (чёрный) на pV-диаграмме: тепло подводится только на изотермах $3 \to 2$ и $1 \to 4$.

6. Теплота. На адиабатах $\delta Q = 0$, тепло подводится только на изотермах; там внутренняя энергия не меняется, и по первому началу термодинамики Q равно работе газа $\nu RT \ln(V_{\text{кон}}/V_{\text{нач}})$:

$$Q_A = \nu R\,(2T) \ln \frac{2V}{V_3} = 2\nu RT \ln(4\sqrt{2}) = 5\,\nu RT \ln 2,$$

$$Q_B = \nu RT \ln \frac{V_4}{V} = \frac{5}{2}\,\nu RT \ln 2.$$

Второй способ — площадь на рис. 3: $Q_A = 2T\,(S_2 - S_1) = 5\nu RT \ln 2$, $Q_B = T\,(S_2 - S_1) = \frac{5}{2}\nu RT \ln 2$ — совпадает.

Обратите внимание. Процесс A начинается со *сжатия*: чтобы всё тепло пришло при высокой температуре, газ сначала адиабатически сжимают, и минимальный объём меньше начального.

Проверка. Размерность: νRT — энергия. Изменение внутренней энергии одно для всех путей, $\Delta U = \frac{3}{2}\nu RT$; по первому началу работа газа $A_A = Q_A - \Delta U \approx 2{,}0\,\nu RT > 0$ и $A_B \approx 0{,}23\,\nu RT > 0$ — в обоих процессах газ в целом расширяется, как и должно быть ($V \to 2V$). Смысл: одно и то же приращение энтропии стоит вдвое больше тепла, если его получить при вдвое большей температуре.

Ответ. 1) $V_A^{\min} = \dfrac{V}{2\sqrt{2}}$, $V_A^{\max} = 2V$; $V_B^{\min} = V$, $V_B^{\max} = 4\sqrt{2}\,V$; 2) $Q_A = 5\nu RT\ln 2 \approx 3{,}5\,\nu RT$, $Q_B = \dfrac{5}{2}\nu RT\ln 2 \approx 1{,}7\,\nu RT$.