Зарядка аккумулятора

Задача 3. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 11 класс, задача 3] «Зарядка аккумулятора».

Иногда электродвигатель можно использовать в качестве генератора напряжения. Рассмотрим в качестве примера электродвигатель, в котором магнитное поле создается постоянным магнитом статора, и тогда при совершении работы по вращению в этом поле ротора двигателя в нем создается ЭДС индукции. Будем поддерживать вращение ротора за счет натяжения легкого нерастяжимого троса с массивным грузом, который плавно (и практически равномерно) опускается с некоторой высоты H. Заметим, что в таком режиме сила тока в обмотке ротора прямо пропорциональна силе натяжения троса. Возникшая ЭДС используется для зарядки аккумулятора, заряд которого увеличивается на величину $Q_1 = 300$ мА $\cdot$ час. Если подключить этот аккумулятор к двум таким же параллельно соединенным электродвигателям, и опустить тот же груз с той же высоты на двух одинаково нагруженных тросах, каждый из которых вращает ротор одного из электродвигателей, то приобретаемый заряд станет равным $Q_2 = 400$ мА $\cdot$ час.

1. Во сколько раз отличается время зарядки в первом и втором случае?
2. Во сколько раз сила тока зарядки аккумулятора в первом и втором случае отличается от силы тока в цепи ротора одного электродвигателя с закрепленным неподвижно ротором при подключении его к этому аккумулятору?
3. Какой заряд приобретет аккумулятор, если аналогичным образом использовать для его зарядки три таких электродвигателя?

Изменением ЭДС аккумулятора в процессе зарядки, внутренним сопротивлением аккумулятора и действием на груз сил сопротивления воздуха можно пренебречь.

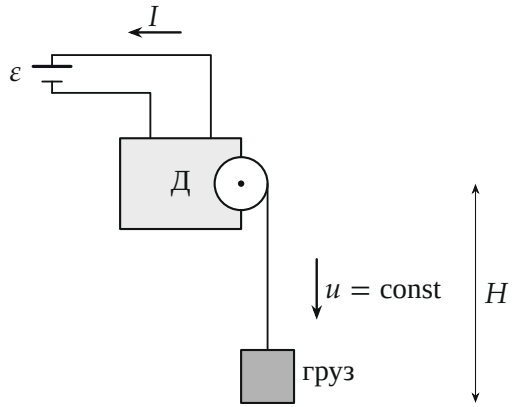

Рис. 1. Поясняющий рисунок: груз на тросе вращает ротор двигателя Д, ток ротора заряжает аккумулятор с ЭДС ε.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Двигатель работает генератором: груз медленно опускается, сила тяжести совершает работу MgH, и она делится на два «счёта» — энергию, запасённую аккумулятором (εQ), и джоулево тепло в обмотках. Ключ задачи — ток ротора пропорционален натяжению троса: груз и трос заданы, значит, задан и суммарный ток зарядки, сколько бы двигателей его ни делили. Чем больше двигателей, тем меньше ток в каждом и тем меньше тепловые потери — и тем больше заряд. Шаблон: механика → ток → закон сохранения энергии.

Обозначения. M — масса груза; n — число двигателей; R — сопротивление обмотки ротора; $\mathcal{E}$ — ЭДС индукции в роторе; I — ток зарядки при одном двигателе; t_n, Q_n — время зарядки и заряд при n двигателях; $I_0 = \varepsilon/R$ — ток через неподвижный ротор.

1. Токи. Груз опускается равномерно — по второму закону Ньютона для груза натяжение троса равно Mg (при n тросах — по Mg/n на каждый). Ток ротора пропорционален натяжению, поэтому при n двигателях в каждом течёт I/n, а в аккумулятор — их сумма (двигатели соединены параллельно, рис. 2):

$$n \cdot \frac{I}{n} = I \quad \text{— ток зарядки при любом } n.$$

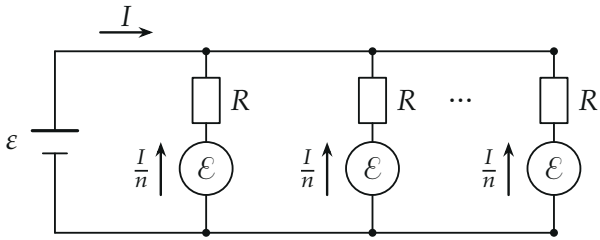

Рис. 2. Схема с n двигателями: каждый ротор — источник $\mathcal{E}$ с сопротивлением обмотки R, ток в ветви I/n, в аккумулятор — I.

Пункт 1. Отношение времён. Ток постоянен, поэтому $Q_n = It_n$, и

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33.$$

С двумя двигателями зарядка идёт в $4/3$ раза дольше: груз опускается медленнее.

2. Закон сохранения энергии для системы «груз + двигатели + аккумулятор» за время опускания: работа силы тяжести идёт в энергию аккумулятора и в тепло обмоток $n\,(I/n)^2 R t_n$ (сопротивления воздуха нет, кинетическая энергия груза постоянна):

$$MgH = \varepsilon Q_n + n\Big(\frac{I}{n}\Big)^2 R\, t_n = Q_n\Big(\varepsilon + \frac{IR}{n}\Big). \qquad (1)$$

Обозначим $x = \dfrac{\varepsilon}{IR} = \dfrac{I_0}{I}$ — это ровно отношение, о котором спрашивают в пункте 2. Сравнивая (1) при $n = 1$ и при данном n:

$$Q_1(x+1) = Q_n\Big(x + \frac{1}{n}\Big) \quad \Rightarrow \quad Q_n = Q_1\,\frac{x+1}{x+1/n}. \qquad (2)$$

Рис. 3 показывает, как делится MgH.

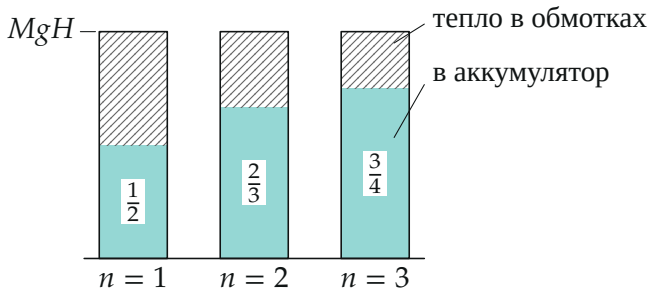

Рис. 3. Доля работы MgH, ушедшая в аккумулятор, $\dfrac{x}{x+1/n}$ при найденном $x=1$; остальное — тепло в обмотках.

Второй способ для (1) — через мощности. Правило Кирхгофа для ветви одного двигателя: $\mathcal{E} = \varepsilon + \frac{I}{n}R$. Мощность силы тяжести Mgu равна мощности всех ЭДС индукции:

$$Mgu = n\,\mathcal{E}\,\frac{I}{n} = I\Big(\varepsilon + \frac{IR}{n}\Big),$$

и, умножив на время $t_n = H/u$, получаем то же уравнение (1).

Пункт 2. Ток через неподвижный ротор. Из (2) при $n=2$:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{x+1}{x+1/2} = \frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad 3x+3 = 4x+2 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{I_0}{I} = 1.$$

В общем виде $x = \dfrac{2Q_1 - Q_2}{2(Q_2 - Q_1)}$. Ток зарядки в обоих случаях один и тот же (I, шаг 1) и равен току $I_0 = \varepsilon/R$ через неподвижный ротор.

Пункт 3. Три двигателя. Из (2) при $n=3$, $x=1$:

$$Q_3 = Q_1\,\frac{1+1}{1+1/3} = \frac{3}{2}\,Q_1 = 450\ \text{мА}\cdot\text{ч},$$

в общем виде

$$Q_3 = \frac{3Q_1Q_2}{4Q_1 - Q_2}.$$

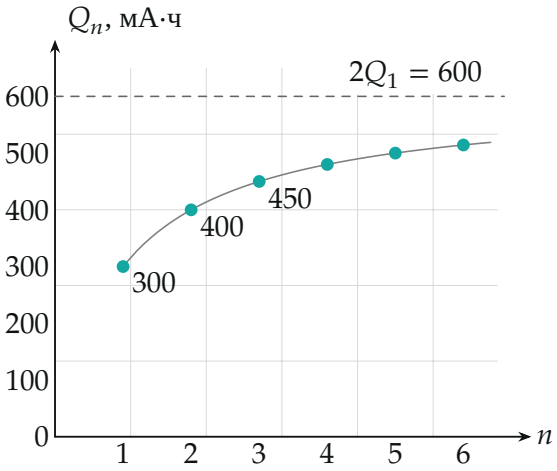

Рис. 4. Заряд $Q_n = \dfrac{2n}{n+1}\,Q_1$ *при* $x = 1$*: точки* $n = 1, 2, 3$ — 300, 400, 450 *мА·ч, предел* $2Q_1$ *при* $n \to \infty$.

Обратите внимание. Груз тот же, но заряд разный: при одинаковом токе зарядки уменьшаются только потери в обмотках, I^2R/n, а скорость груза подстраивается сама.

Проверка. Размерность: в (1) εQ и I^2Rt — джоули. Предел $n \to \infty$: потерь нет, $Q_\infty = Q_1(x+1)/x = 2Q_1 = 600$ мА·ч, $MgH = \varepsilon Q_\infty$ — вся работа в аккумуляторе. При $n = 3$ подставим найденные числа в (1): $Q_3(\varepsilon + IR/3) = 450 \cdot \frac{4}{3} IR = 600\,IR = Q_1(\varepsilon + IR)$ — сходится. Смысл: делить нагрузку между двигателями выгодно, потому что тепло растёт как квадрат тока.

Ответ. 1) $t_2/t_1 = Q_2/Q_1 = 4/3$; 2) в обоих случаях ток зарядки равен току через неподвижный ротор: $I_0/I = \dfrac{2Q_1 - Q_2}{2(Q_2 - Q_1)} = 1$; 3) $Q_3 = \dfrac{3Q_1Q_2}{4Q_1 - Q_2} = 450$ мА·ч.