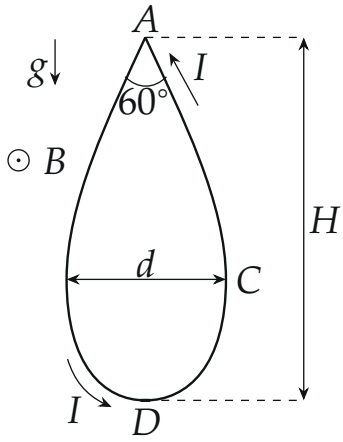
Петля с током

Задача 4. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 11 класс, задача 4] «Петля с током».

В горизонтальном однородном магнитном поле индукции B висит гибкая проводящая нить длины L, по которой течёт ток I. Оба конца нити подвешены практически к одной и той же точке A. В равновесном положении эти концы образуют друг с другом угол $\alpha = 60°$, а расстояние между точкой подвеса и самой нижней точкой нити равно $H = L\sqrt{3}/4$ (см. рис.). Ускорение свободного падения равно g. Собственным магнитным полем тока можно пренебречь. Нить является однородной.



1. Найдите массу нити m и силу натяжения нити T_D в её нижней точке (точка D на рисунке).
2. Определите силу натяжения нити T_C в её крайне правой точке (точка C на рисунке).
3. Найдите расстояние d между крайне левой и крайне правой точкой висящей нити.

▲ **Решение. Что происходит.** Сила Ампера раздувает петлю наружу, тяжесть тянет вниз, натяжение держит форму. Две идеи делают задачу короткой. Первая: сила Ампера на кусок нити *любой формы* в однородном поле зависит только от положения его концов. Вторая: сила Ампера

перпендикулярна нити, поэтому вдоль нити натяжение меняют только силы тяжести — как у обычной цепочки, T растёт с высотой. Дальше — условия равновесия кусков нити.

Обозначения. Ось x — горизонтально вправо, y — вверх, начало в D; $\lambda = m/L$ — масса единицы длины; T_A — натяжение у точки подвеса; h — высота точки C над D; φ — угол касательной с горизонталью.

1. Сила Ампера на кусок нити. Элемент dl с током (рис. 2) под углом α к оси x: сила $dF = IB\,dl$ перпендикулярна ему, и

$$dF_x = IB\,dl\sin\alpha = IB\,dy, \qquad dF_y = -IB\,dl\cos\alpha = -IB\,dx.$$

Суммируя от конца M куска до конца N:

$$F_x = IB\,(y_N - y_M), \qquad F_y = -IB\,(x_N - x_M). \tag{1}$$

Направление тока на ответ не влияет: петля симметрична, и в каждой половине ток идёт так, что сила раздувает петлю.

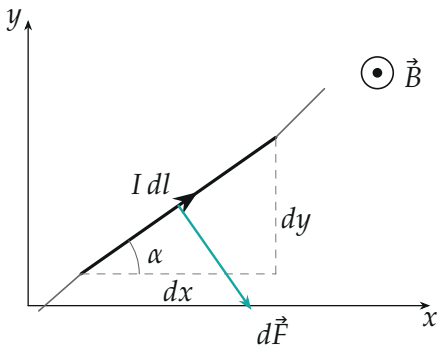


Рис. 2. Элемент нити dl и сила Ампера $d\vec{F} \perp d\vec{l}$; поле $\vec{B}$ на нас, перпендикулярно плоскости петли.

2. Натяжение вдоль нити. Для малого элемента силы вдоль касательной: разность натяжений и проекция силы тяжести, $dT = \lambda g\,dy$; сила Ампера перпендикулярна элементу и в эту проекцию не входит. Отсюда для любых двух точек

$$T_2 - T_1 = \lambda g\,(y_2 - y_1). \tag{2}$$

Пункт 1. Правая половина нити от D до A (рис. 3). На неё действуют: $\vec{T}_A$ — вдоль нити у подвеса, под 30° к вертикали; $\vec{T}_D$ — горизонтально, со стороны левой половины; сила тяжести $mg/2$; сила Ампера по (1): $F_x = IB(y_A - y_D) = IBH$, $F_y = -IB(x_A - x_D) = 0$, так как A и D на одной вертикали. Условия равновесия:

$$y:\ T_A\cos 30^\circ = \frac{mg}{2}, \qquad x:\ T_A\sin 30^\circ + T_D = IBH.$$

По (2) между D и A: $T_A - T_D = \lambda g H = \dfrac{mg}{L}\cdot\dfrac{\sqrt{3}L}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}mg$. Из первого уравнения $T_A = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}$, тогда

$$T_D = \frac{mg}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}\,mg}{4} = \frac{mg}{4\sqrt{3}} = \frac{T_A}{4}.$$

Подставляем в уравнение для x: $\dfrac{mg}{2\sqrt{3}} + \dfrac{mg}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}mg = IB\dfrac{\sqrt{3}L}{4}$, откуда

$$m = \frac{IBL}{g}, \qquad T_D = \frac{IBL}{4\sqrt{3}}.$$

Заметим: $\lambda g = mg/L = IB$ — вес единицы длины равен силе Ампера на единицу длины. Это пригодится дальше.

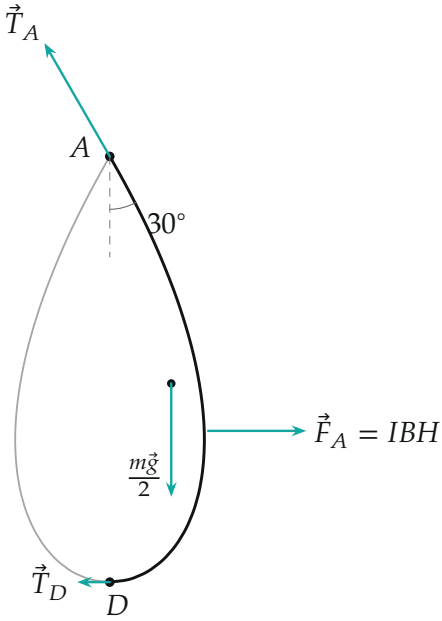


Рис. 3. Силы на правую половину нити. Форма нити рассчитана численно, длины стрелок — в одном масштабе: $T_A \approx 0{,}58\,mg$, $mg/2$, $IBH \approx 0{,}43\,mg$, $T_D \approx 0{,}14\,mg$.

Пункт 2. Кусок DC (рис. 4). В C нить вертикальна, натяжение $\vec{T}_C$ направлено вверх; в D — $\vec{T}_D$ влево. По (1) сила Ампера на DC имеет $F_x = IBh$. Условие равновесия по x:

$$T_D = IBh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{T_D}{IB} = \frac{L}{4\sqrt{3}}.$$

По (2) с $\lambda g = IB$:

$$T_C = T_D + \lambda g h = T_D + IBh = 2T_D = \frac{IBL}{2\sqrt{3}}.$$

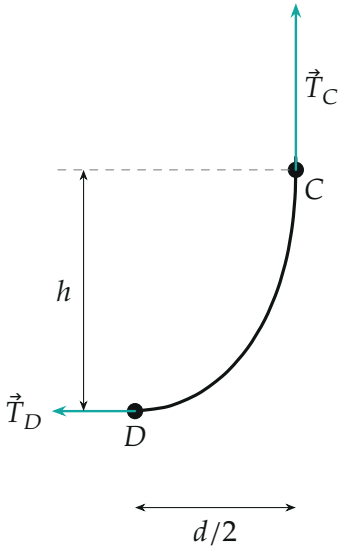


Рис. 4. Кусок DC (выделен): в C касательная вертикальна. Длины стрелок: $T_C = 2T_D$.

Пункт 3. Форма нижней части. Возьмём точку $K(x;\, y)$ на дуге DC (рис. 5), натяжение в ней T, касательная под углом φ. Равновесие куска DK по оси x с силой Ампера (1): $T\cos\varphi + IBy = T_D$, а по (2) $T = T_D + IBy$. С $T_D = IBh$:

$$\cos\varphi = \frac{h-y}{h+y}, \qquad \sin\varphi = \frac{2\sqrt{hy}}{h+y}, \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{h-y}{2\sqrt{hy}}.$$

Суммируем dx от D ($y = 0$) до C ($y = h$):

$$\frac{d}{2} = \int_0^h \frac{h-y}{2\sqrt{hy}}\,dy = \frac{1}{2\sqrt{h}}\left(2h^{3/2} - \frac{2}{3}h^{3/2}\right) = \frac{2}{3}h, \qquad d = \frac{4}{3}h = \frac{L}{3\sqrt{3}}.$$

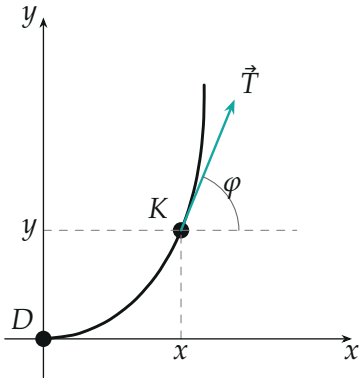


Рис. 5. Точка K на дуге DC и угол касательной φ.

Второй способ проверить шаг. Длина дуги DC:

$$dl = \frac{dy}{\sin\varphi} = \frac{h+y}{2\sqrt{hy}}\,dy, \qquad l_{DC} = \int_0^h \frac{h+y}{2\sqrt{hy}}\,dy = \frac{4}{3}h.$$

Равновесие куска DC по оси y (сила Ампера по (1) $F_y = -IB\,d/2$, вниз):

$$T_C = \lambda g\, l_{DC} + IB\frac{d}{2} = IB\Big(\frac{4}{3}h + \frac{2}{3}h\Big) = 2IBh = 2T_D$$

— совпадает с пунктом 2.

Обратите внимание. Натяжение меняется вдоль нити только из-за тяжести, хотя сила Ампера по модулю того же порядка: она всё время перпендикулярна нити и лишь изгибает её.

Проверка. Размерность: IBL — сила, IBL/g — масса. Численный расчёт формы нити (уравнения равновесия элемента, python) при $\lambda g = IB$ даёт: концы сходятся в одной точке под углом 60° при $T_D = 0{,}1443\,IBL$, высота $0{,}4330\,L = \sqrt{3}L/4$, ширина $0{,}1925\,L = L/(3\sqrt{3})$. Смысл: петля — «капля», узкая вверху, где натяжение велико и нить почти прямая.

Ответ. 1) $m = \dfrac{IBL}{g}$, $T_D = \dfrac{IBL}{4\sqrt{3}}$; 2) $T_C = 2T_D = \dfrac{IBL}{2\sqrt{3}}$; 3) $d = \dfrac{L}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}19\,L$.