Я надел свои очки

Задача 5. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 11 класс, задача 5] «Я надел свои очки».

Часто на портретных фотографиях, сделанных с помощью камеры смартфона (рис. 1), в отражении очков фотографирующего можно увидеть изображение его смартфона. Определите по фотографии ниже радиус кривизны поверхности очков, оцените погрешность измерений. Считайте, что расстояние между смартфоном и очками известно точно и равно $L = 50$ см. На рис. 2 изображены смартфон и очки, лежащие рядом друг с другом. Длины, необходимые для получения числового ответа в задаче, можно измерить с помощью линейки по фотографиям из условия.



Рис. 1. Портретная фотография, сделанная с помощью смартфона.



Рис. 2. Очки и смартфон рядом друг с другом.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Наружная поверхность стекла очков — выпуклое сферическое зеркало. Оно даёт мнимое уменьшенное изображение смартфона за стеклом, и камера смартфона снимает очки и это изображение вместе. На портрете мы видим *угловые* размеры: очков — с расстояния L, изображения смартфона — с расстояния $L + l$. На рис. 2 — *настоящие* размеры. Сравнив два отношения, найдём, во сколько раз зеркало уменьшило смартфон, а по формуле зеркала — его радиус. Класс задачи — оценка по фотографии: геометрическая оптика плюс измерение.

Обозначения. X — ширина очков, Y — длина смартфона (на портрете его отражение вытянуто по горизонтали, как и смартфон на рис. 2, отношение сторон ≈ 2); y — размер изображения смартфона в зеркале, l — расстояние от стекла до этого изображения; α, β — угловые размеры очков и изображения на портрете; R — радиус кривизны стекла.

1. Изображение в выпуклом зеркале (рис. 3). Фокусное расстояние выпуклого зеркала $-R/2$; формула зеркала для предмета на расстоянии

L и мнимого изображения за зеркалом на расстоянии l:

$$\frac{1}{L} - \frac{1}{l} = -\frac{2}{R}. \tag{1}$$

Увеличение — отношение расстояний:

$$y = Y\frac{l}{L}. \tag{2}$$

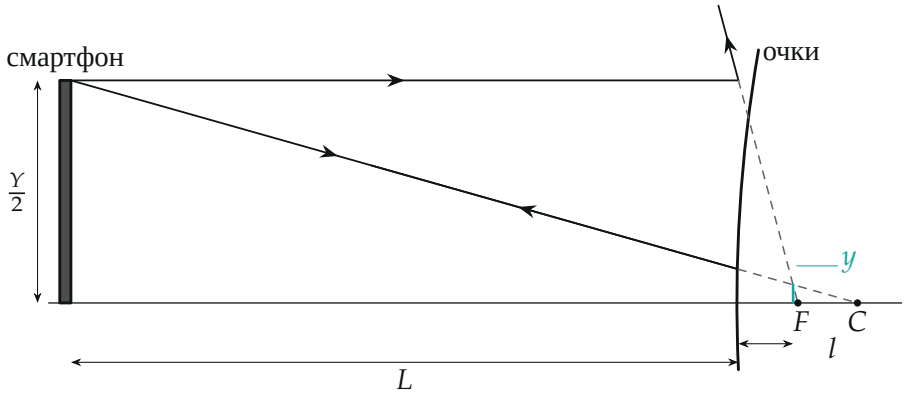

Рис. 3. Построение изображения смартфона в выпуклом стекле (вертикальный масштаб в 2,2 раза крупнее горизонтального; расстояния — по найденному $R = 8{,}9$ см). Луч, параллельный оси, отражается так, будто вышел из фокуса F; луч, идущий к центру C, отражается назад. Продолжения пересекаются в изображении y.

2. Угловые размеры (рис. 4). Камера стоит в той же точке S, что и смартфон. Углы малы:

$$\alpha = \frac{X}{L}, \qquad \beta = \frac{y}{L+l}. \tag{3}$$

Делим и подставляем (2):

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{X}{Y}\cdot\frac{L+l}{l} \quad \Rightarrow \quad k \equiv \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{Y}{X} = 1 + \frac{L}{l}.$$

Из (1) $\frac{L}{l} = 1 + \frac{2L}{R}$, поэтому $k = 2 + \frac{2L}{R}$ и

$$R = \frac{2L}{k-2} = \frac{2L}{\frac{\alpha}{\beta}\frac{Y}{X} - 2}. \qquad (4)$$

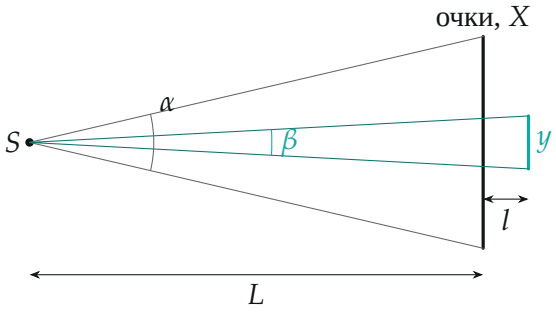

Рис. 4. Угловые размеры очков α и изображения смартфона β из точки съёмки S (схема, углы увеличены).

3. Измерения. Длины берём по фотографиям условия (в пикселях исходных снимков; линейкой по распечатке получаются те же отношения):

	очки	смартфон
рис. 2 (реальные размеры)	$X \to 1240$	$Y \to 1366$
рис. 1 (угловые размеры)	$\alpha \to 1780$	$\beta \to 150$

Отсюда $\frac{X}{Y} = 0{,}91 \pm 0{,}03$ (края размыты на ± 10 пикс., снимок мог быть сделан чуть сбоку) и $\frac{\alpha}{\beta} = 12{,}0 \pm 0{,}5$ (край отражения размыт на ± 3 пикс. из 150). Очки уже смартфона: $X < Y$.

4. Расчёт. $k = \frac{12{,}0}{0{,}91} \approx 13{,}2$, и по (4)

$$R = \frac{2 \cdot 50\text{ см}}{13{,}2 - 2} \approx 8{,}9\text{ см}.$$

Погрешность: относительные погрешности отношений $0{,}5/12 \approx 4\,\%$ и $0{,}03/0{,}91 \approx 3\,\%$ складываются квадратично, $\Delta k \approx 13{,}2 \cdot 5\,\% \approx 0{,}7$; по (4) $\dfrac{\Delta R}{R} = \dfrac{\Delta k}{k-2} \approx \dfrac{0{,}7}{11{,}2} \approx 6\,\%$:

$$R = (8{,}9 \pm 0{,}6)\ \text{см}.$$

Рис. 5 показывает, как полоса значений k переходит в полосу значений R.

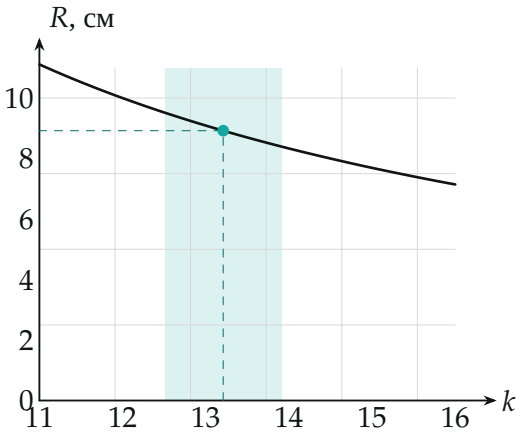

Рис. 5. Зависимость (4) $R(k)$ при $L = 50$ см; закрашена полоса $k = 13{,}2 \pm 0{,}7$, точка — измеренное значение.

Обратите внимание. В (4) входит Y/X, а не X/Y, и важно, что очки на рис. 2 *уже* смартфона. У организаторов в ответе $R = (10{,}7 \pm 1{,}6)$ см: они взяли $X/Y = 1{,}1$ (обратное отношение) и ошиблись в арифметике $R_{\max}$ (по их же числам $100/(11/1{,}2 - 2) \approx 14$ см, а не 12,2).

Проверка. Размерность: k безразмерно, R — в единицах L. Предел: плоское стекло ($R \to \infty$) даёт $k = 2$ — изображение вдвое дальше очков и того же размера, угловой размер смартфона $\beta = Y/(2L)$, верно для плоского зеркала. Второй способ: из (1) $l = \left(\frac{1}{L} + \frac{2}{R}\right)^{-1} \approx 4{,}1$ см, увеличение $l/L \approx 0{,}08$; тогда $\alpha/\beta = \frac{X}{Y} \cdot \frac{L+l}{l} = 0{,}91 \cdot 13{,}2 \approx 12$ — совпадает с измеренным. Смысл: радиус около 9 см — обычная кривизна солнцезащитных стёкол (линза «базы 6» имеет $R \approx 8{,}8$ см).

Ответ. $R = \dfrac{2L}{\frac{\alpha}{\beta}\frac{Y}{X} - 2} \approx (8{,}9 \pm 0{,}6)$ см при $X/Y = 0{,}91 \pm 0{,}03$, $\alpha/\beta = 12{,}0 \pm 0{,}5$.