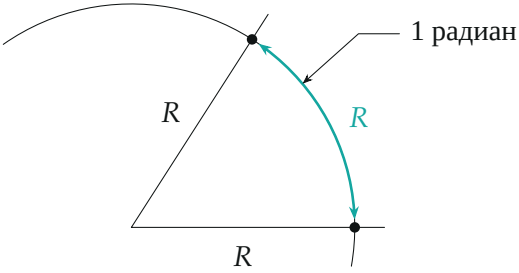
Радиан

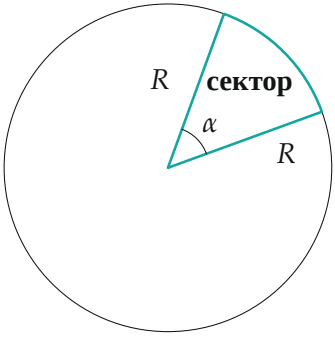
Задача 1. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 7 класс, практический тур, задача 1] «Радиан».

Оборудование: три листа картона формата А4, ножницы, весы с точностью не менее 0,1 г, миллиметровка для построения графика.

В физике принято измерять углы в радианах. Радиан — это центральный угол, соответствующий дуге окружности, длина которой равна радиусу этой окружности. Любовь физиков к радианам не случайна. Многие физические формулы, в которых фигурируют углы, в радианах выглядят гораздо проще.

К заданию прилагаются шаблоны на двух листах А4. На одном из шаблонов приведены одинаковые круги, на которых показаны центральные углы, равные половине и целому радиану. Также на распечатках присутствуют квадраты. Сторона каждого из этих квадратов в точности равна радиусу окружностей.





1. Используя выданные распечатки, картон и весы, снимите зависимость отношения массы m кругового сектора из картона с углом α в радианах к массе M квадрата из картона, имеющего сторону, равную радиусу сектора, от угла α: $\frac{m}{M}(\alpha)$ (не менее 8 точек).
2. Постройте график этой зависимости.
3. Зависимость площади сектора от его радиуса R и угла α, выраженного в радианах, имеет вид $S_{\text{сектора}} = k\alpha R^2$. Пользуясь графиком, определите коэффициент пропорциональности k.

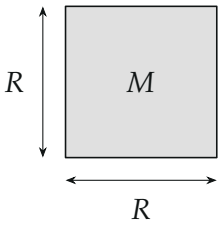
4. Экспериментально определите количество радиан в полном круге. Важно! Теоретические выводы не засчитываются!
5. Выведите формулу перевода радианов в градусы.
6. К заданию также приложена распечатка с изображением большого сектора, угол и радиус которого неизвестны. Определите угол этого сектора в градусах.

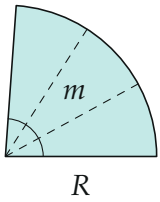
При выполнении работы можно пользоваться собственными пишущими принадлежностями для нанесения контуров для вырезания на бумаге и картоне. Транспортирами пользоваться запрещено!

▲ **Решение. Что происходит.** Картон однородный, его масса пропорциональна площади: $m = \sigma S$, где σ — масса квадратного сантиметра. Поэтому весы заменяют нам «измеритель площади», а отношение масс двух фигур из одного картона — это отношение их площадей, и σ в нём сокращается. Главная идея — сравнивать каждый сектор с квадратом $R \times R$: тогда сокращается и радиус.

Обозначения. m — масса сектора с углом α, M — масса квадрата со стороной R, $M_к$ — масса целого круга, N — число радиан в полном круге (его и ищем в пункте 4).

1. Измерения. Отдельные фигурки лёгкие (доли грамма), а весы показывают десятые доли грамма. Поэтому одинаковые фигуры вырезают и взвешивают пачкой по 5 штук и делят на 5 — относительная погрешность уменьшается в 5 раз. Получено: 5 квадратов — 1,86 г, $M = 0{,}372$ г; 5 кругов — 5,84 г, $M_к = 1{,}168$ г. Секторы с углами, кратными половине радиана, получаем, откладывая шаблонный угол 0,5 рад от края подряд нужное число раз. Сектор больше полного круга (7 рад) из одного круга не вырезать — это целый круг плюс сектор на остаток угла, их взвешивают вместе.





$\alpha = 1{,}5$ рад:
три угла по 0,5 рад

Квадрат со стороной R и сектор того же радиуса; пунктир — откладывание шаблонного угла 0,5 рад

Результаты (масса сектора m и отношение m/M):

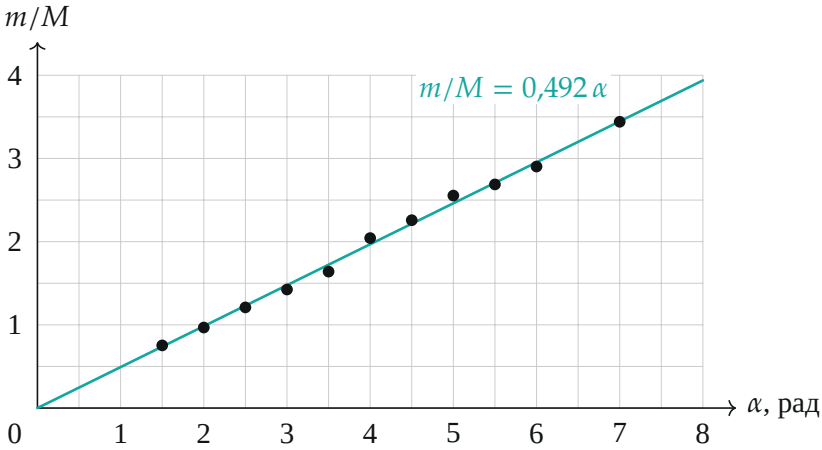
α, рад	1,5	2	2,5	3	3,5	4
m, г	0,28	0,36	0,45	0,53	0,61	0,76
m/M	0,75	0,97	1,21	1,42	1,64	2,04

α, рад	4,5	5	5,5	6	7
m, г	0,84	0,95	1,00	1,08	1,28
m/M	2,26	2,55	2,69	2,90	3,44

2. График. Отношение масс равно отношению площадей:

$$\frac{m}{M} = \frac{\sigma S_{\text{сектора}}}{\sigma R^2} = \frac{k\alpha R^2}{R^2} = k\alpha,$$

то есть ожидаем прямую через начало координат: у сектора нулевого угла нулевая масса. Точки ложатся на такую прямую.



Отношение масс сектора и квадрата от угла; прямая — метод наименьших квадратов через начало координат

3. Коэффициент k. Угловой коэффициент прямой $y = k\alpha$ по методу

наименьших квадратов

$$k = \frac{\sum \alpha_i y_i}{\sum \alpha_i^2} = 0{,}492 \pm 0{,}004 \approx 0{,}49,$$

где $y_i = m_i/M$. В пределах точности опыта $k = 0{,}5$, то есть $S_{\text{сектора}} = \frac{1}{2}\alpha R^2$.

4. Радианы в полном круге. Полный круг — это сектор с углом N радиан, поэтому для него тоже $M_{\text{к}}/M = kN$:

$$N = \frac{M_{\text{к}}}{kM} = \frac{1{,}168}{0{,}492 \cdot 0{,}372} \approx 6{,}4.$$

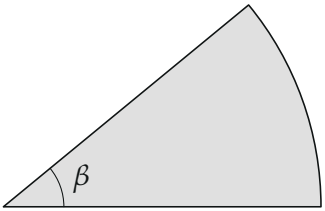
Погрешность N — в основном от k и от массы квадрата, около $\pm 0{,}1$, так что $N = 6{,}4 \pm 0{,}1$; с округлённым $k = 0{,}5$ получается $3{,}14/0{,}5 = 6{,}28$. Теоретическое значение $2\pi \approx 6{,}28$ лежит на краю этого интервала.

5. Перевод радианов в градусы. Полный круг — это 360° и N радиан. Угол пропорционален длине дуги, поэтому

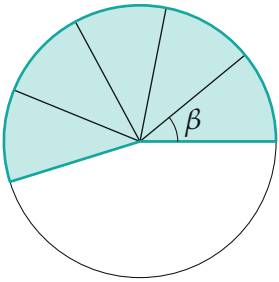
$$A^\circ = \frac{360^\circ}{N}\,\alpha \approx \frac{360^\circ}{6{,}28}\,\alpha \approx 57{,}3^\circ \cdot \alpha,$$

где α — угол в радианах, A — в градусах.

6. Угол большого сектора. Радиус большого сектора не равен R, а масса сектора зависит и от радиуса. Поэтому сам большой сектор не взвешиваем, а переносим его угол β на наш круг радиуса R: кладём вершину сектора в центр круга и обводим его стороны. Угол небольшой, его сектор весит доли грамма, поэтому откладываем β подряд пять раз и вырезаем сектор 5β из картона: его масса 0,64 г, на один угол β приходится $m_\beta = 0{,}128$ г.



большой сектор



сектор 5β радиуса R

Угол β большого сектора переносим на круг радиуса R пять раз подряд (вершина — в центре круга)

Угол в радианах по формуле пункта 3: $\beta = \dfrac{m_\beta}{kM} = \dfrac{0{,}128}{0{,}492 \cdot 0{,}372} \approx 0{,}70$ рад. В градусах по пункту 5:

$$\beta^\circ = \frac{360^\circ}{N} \cdot \frac{m_\beta}{kM} = 360^\circ \cdot \frac{m_\beta}{M_к} = 360^\circ \cdot \frac{0{,}128}{1{,}168} \approx 39{,}5^\circ.$$

Обратите внимание: в градусах k и масса квадрата сокращаются — угол сектора равен доле его массы от массы целого круга того же радиуса, умноженной на 360°. Поэтому ошибка k на ответ пункта 6 не влияет.

Проверка. Размерности: m/M и k безразмерны, N — число. Предел: при $\alpha = N$ сектор становится кругом, и прямая графика должна пройти через точку круга $M_к/M = 3{,}14$ при $\alpha \approx 6{,}4$ — так и есть. Второй способ для пункта 4: круг и квадрат той же стороны дают $M_к/M = \pi R^2/R^2 \approx 3{,}14$, а с $k = \frac{1}{2}$ это $N = 2\pi$; опыт подтверждает это с точностью около 2 %.

Ответ. 1–2) таблица и график $m/M(\alpha)$ — прямая через начало координат; 3) $k = 0{,}49 \pm 0{,}01 \approx 0{,}5$; 4) $N = M_к/(kM) \approx 6{,}4 \pm 0{,}1$ (теоретически $2\pi \approx 6{,}28$); 5) $A^\circ = \dfrac{360^\circ}{N}\,\alpha \approx 57^\circ \cdot \alpha$; 6) $\beta \approx 0{,}70$ рад $\approx 39{,}5^\circ$.