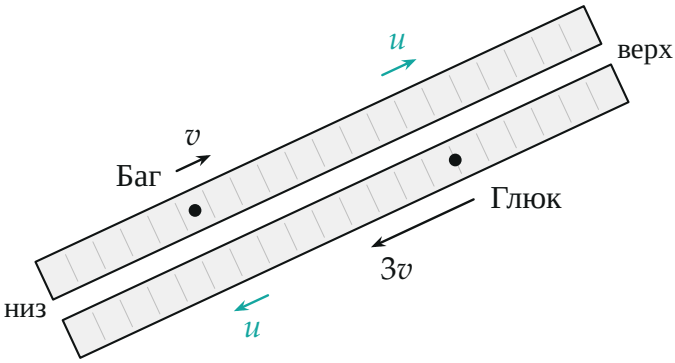
Случай на эскалаторе

Задача 1. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 7 класс, задача 1] «Случай на эскалаторе».

Экспериментатор Глюк и теоретик Баг одновременно ступили на параллельные эскалаторы в метро. Глюк едет сверху вниз, Баг — снизу вверх. Оба идут с постоянными скоростями по ходу движения. К моменту, когда друзья поравнялись, Глюк насчитал $N_1 = 144$ ступеньки, а Баг — $N_2 = 48$ ступенек.

1. Кто движется относительно эскалатора быстрее, Глюк или Баг, и во сколько раз?
2. Сколько ступенек N_4 насчитает Баг за все время движения, если Глюк за время движения насчитал $N_3 = 216$ ступенек?
3. Какое количество N ступенек можно насчитать, если идти по стоящему эскалатору?

Эскалаторы имеют одинаковую длину и движутся с одинаковыми скоростями.



Поясняющий рисунок: Глюк идёт вниз по спускающемуся эскалатору, Баг — вверх по поднимающемуся. Скорости людей — относительно своих ступенек, u — скорость ступенек

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на сложение скоростей: скорость человека относительно земли равна его скорости относительно ступенек плюс скорость ступенек. Человек насчитывает ступеньки, по

которым шагает, — это его путь *относительно эскалатора*. Длина эскалатора N (в ступеньках) — это путь относительно земли. Главная идея: записать длину эскалатора двумя способами — через встречу и через полный спуск Глюка — и из этого найти скорость эскалатора.

Обозначения. Путь меряем в ступеньках. v — скорость Бага относительно эскалатора, u — скорость эскалатора, t — время от начала движения до встречи, $t_\Г$ — время спуска Глюка.

Пункт 1. До встречи оба шли одно и то же время t, а насчитанное число ступенек — путь относительно эскалатора, равный скорости, умноженной на время. Поэтому скорости относятся как числа ступенек:

$$\frac{v_\Г}{v} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{144}{48} = 3.$$

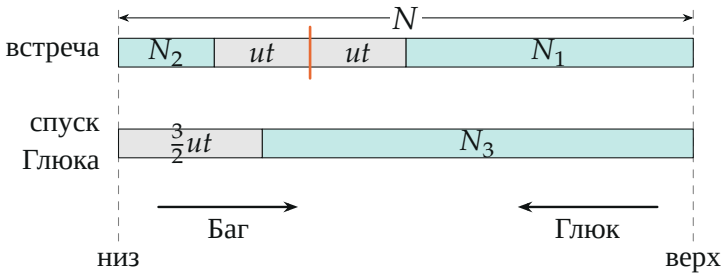
Глюк движется относительно эскалатора в 3 раза быстрее: $v_\Г = 3v$, и $vt = N_2 = 48$.

Пункт 3 (сначала длина эскалатора). 1. Длина через встречу. Относительно земли Глюк движется со скоростью $3v+u$ (вниз), Баг — $v+u$ (вверх). До встречи они вместе прошли всю длину эскалатора:

$$N = (3v + u)t + (v + u)t = N_1 + N_2 + 2ut.$$

2. Длина через спуск Глюка. Время спуска — во столько раз больше t, во сколько N_3 больше N_1 (скорость относительно ступенек та же): $t_\Г = \frac{N_3}{N_1}t = \frac{3}{2}t$. За это время Глюк прошёл N_3 ступенек и эскалатор перенёс его на $u \cdot \frac{3}{2}t$:

$$N = N_3 + \frac{3}{2}ut.$$



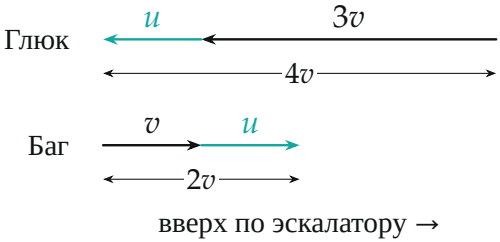
Длина эскалатора двумя способами. Бирюзовое — ступеньки, пройденные ногами, серое — путь, на который перенёс эскалатор. Морковная черта — место встречи

3. Скорость эскалатора. Приравниваем:

$$N_1 + N_2 + 2ut = N_3 + \frac{3}{2}ut,$$
$$ut = 2(N_3 - N_1 - N_2) = 2(216 - 144 - 48) = 48.$$

Получилось $ut = vt$: скорость эскалатора равна скорости Бага относительно ступенек, $u = v$. Тогда

$$N = N_3 + \frac{3}{2}ut = 216 + 72 = 288.$$



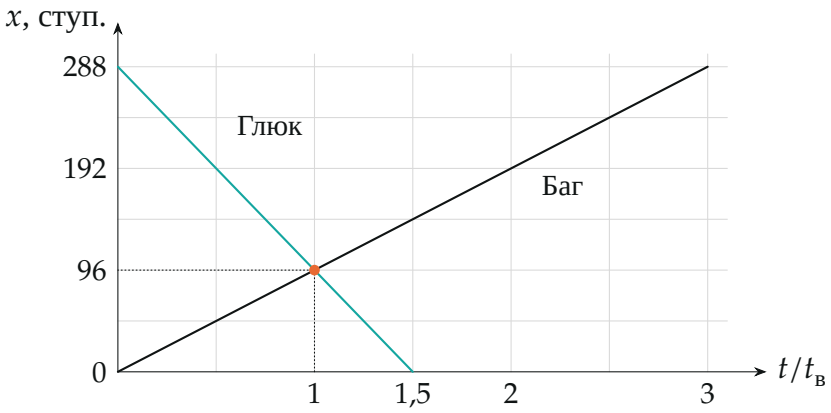
Сложение скоростей при $u = v$: относительно земли Глюк спускается со скоростью $4v$, Баг поднимается со скоростью $2v$

Столько ступенек насчитает человек на стоящем эскалаторе: тогда путь относительно ступенек и есть длина эскалатора.

Пункт 2. Баг движется относительно земли со скоростью $v + u = 2v$ и проходит длину N за время $\frac{N}{2v}$. Ступеньки он считает со скоростью v:

$$N_4 = v \cdot \frac{N}{v+u} = \frac{N}{2} = 144.$$

Обратите внимание: насчитанные ступеньки — это путь относительно движущегося эскалатора, а не длина эскалатора. Поэтому $N_3 = 216$ меньше длины $N = 288$: часть пути Глюка «проехал» эскалатор.



Координаты относительно земли (от нижнего конца) при $u = v$: Глюк спускается со скоростью $4v$ и доходит вниз за $1{,}5t_в$, Баг поднимается со скоростью $2v$ и доходит вверх за $3t_в$; $t_в$ — время до встречи

Проверка. Второй способ для Бага: он идёт со скоростью v всё время подъёма, а до встречи он насчитал 48 за время t; подъём длится $\frac{N}{2v} = \frac{288}{96}t = 3t$ (по графику — то же), значит, $N_4 = 3 \cdot 48 = 144$. Для Глюка: $4v \cdot t_Г = 4 \cdot 48 \cdot 1{,}5 = 288 = N$ — совпало. Предел: если бы эскалатор стоял ($u = 0$), оба способа дали бы $N = N_1 + N_2 = 192$ и $N = N_3 = 216$ — противоречие; именно разница $N_3 - N_1 - N_2$ и выдаёт движение эскалатора.

Физический смысл: эскалатор помогает Глюку и Багу одинаково, поэтому разница в их счёте ступенек — это только разница их собственных скоростей.

Ответ. 1) Глюк быстрее в 3 раза; 2) $N_4 = 144$; 3) $N = 288$.