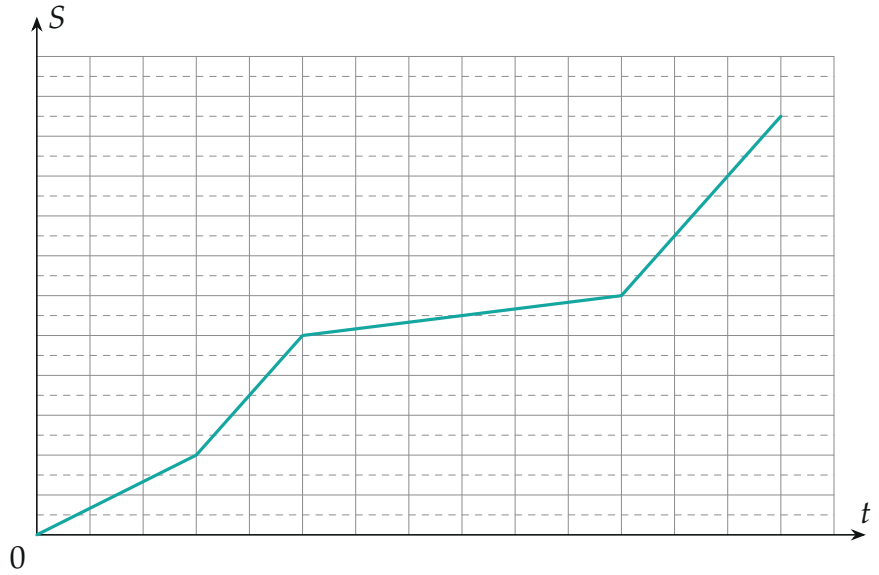
Средняя скорость

Задача 2. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 7 класс, задача 2] «Средняя скорость».

Семиклассник, совершая поездку на дачу, через равные малые промежутки времени записывал путь, пройденный автомобилем. По этим данным он построил график зависимости пути S автомобиля от времени t, который представлен на рисунке. Но начинающий экспериментатор забыл оцифровать оси пути и времени. При этом он точно помнит, что между моментами, когда средняя путевая скорость принимала максимальное и минимальное значения, прошёл ровно час, а средняя путевая скорость за последний час движения составила 50 км/ч.



Определите:

1. цену деления по оси t;
2. цену деления по оси S (между сплошной и пунктирной линиями);
3. время в пути;
4. расстояние от дома до дачи;
5. мгновенную скорость на 40-й минуте;

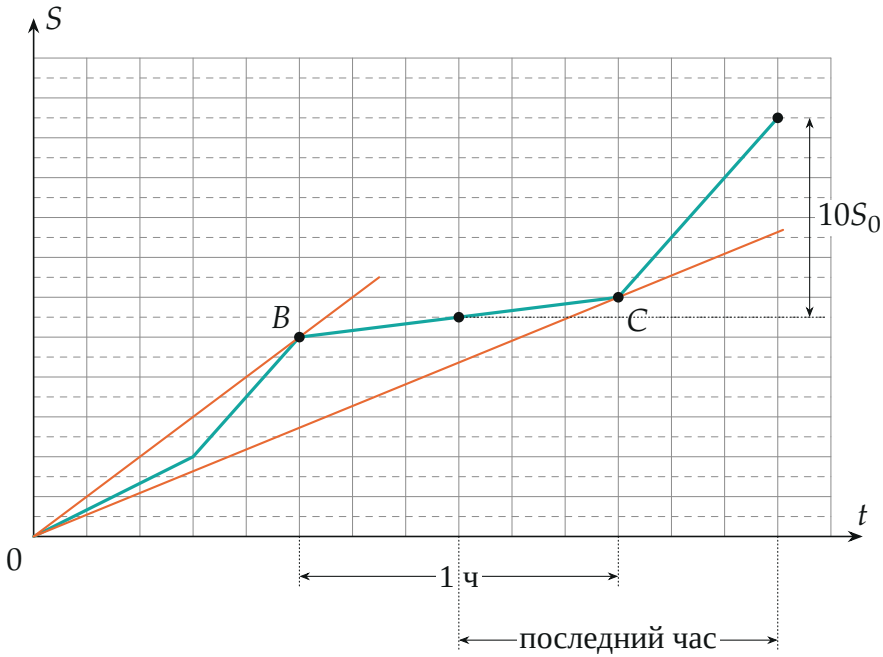
6. во сколько раз минимальная мгновенная скорость движения меньше мгновенной скорости движения на последнем участке;
7. среднюю скорость на середине пути.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на чтение графика пути. Средняя путевая скорость от начала поездки до момента t — это $S(t)/t$, то есть наклон прямой, проведённой из начала координат в точку графика. Мгновенная скорость — наклон самого графика; график состоит из четырёх отрезков, значит, на каждом участке скорость постоянна. Главная идея: найти на графике моменты максимума и минимума средней скорости (по наклону лучей из начала координат), а дальше двух данных условия хватает, чтобы оцифровать обе оси.

Обозначения. τ — цена деления по оси t (одна клетка), S_0 — цена деления по оси S (от сплошной линии до пунктирной). Изломы графика в клетках: $(3;\,4)$, $B(5;\,10)$, $C(11;\,12)$, конец $(14;\,21)$ (по t — в клетках, по S — в делениях S_0).

Пункт 1. Средняя скорость $\frac{S}{t}$ пропорциональна наклону луча из начала координат в точку графика. Сравним наклоны лучей в изломы (между изломами наклон луча меняется монотонно, поэтому экстремумы — в изломах): $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$; $\frac{10}{5} = 2$; $\frac{12}{11} \approx 1{,}09$; $\frac{21}{14} = 1{,}5$ (в делениях S_0 на клетку). Наибольшая — в точке B, наименьшая — в C (начало поездки не в счёт: там средняя скорость равна начальной, $\frac{4}{3}$). Между B и C $11-5=6$ клеток, это 1 час:

$$\tau = \frac{60\text{ мин}}{6} = 10\text{ мин}.$$

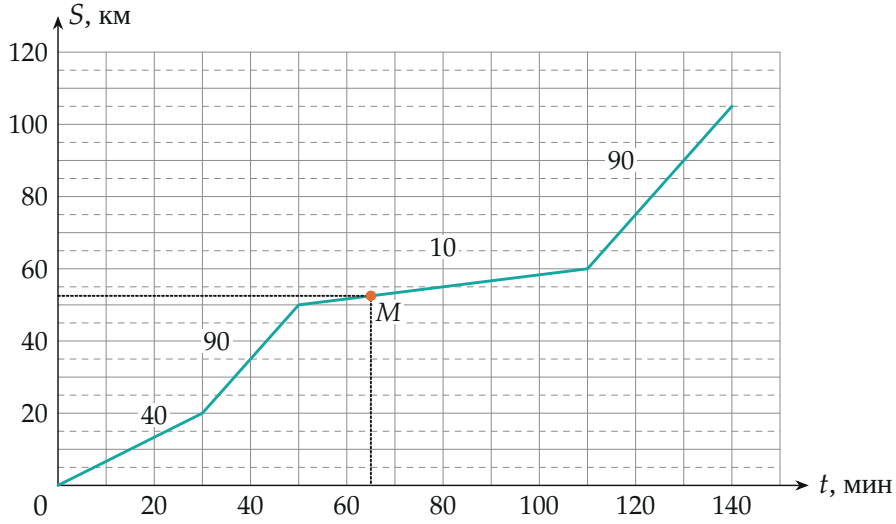


Лучи из начала координат: OB — самый крутой (максимум средней скорости), OC — самый пологий (минимум). Справа — путь за последний час

Пункт 2. Последний час — последние 6 клеток, от 8-й до 14-й. В момент 8 клеток автомобиль на третьем участке: $S = 10 + \frac{12-10}{11-5} \cdot (8 - 5) = 11$ делений. В конце $S = 21$ деление. За час пройдено $10S_0$, и по условию это 50 км:

$$10S_0 = 50 \text{ км} \quad \Rightarrow \quad S_0 = 5 \text{ км}.$$

Пункты 3 и 4. Время в пути — 14 клеток: $14 \cdot 10 = 140$ мин, то есть 2 ч 20 мин. Расстояние — $21S_0 = 105$ км.



Оцифрованный график. Числа у отрезков — скорость на участке в км/ч; M — середина пути

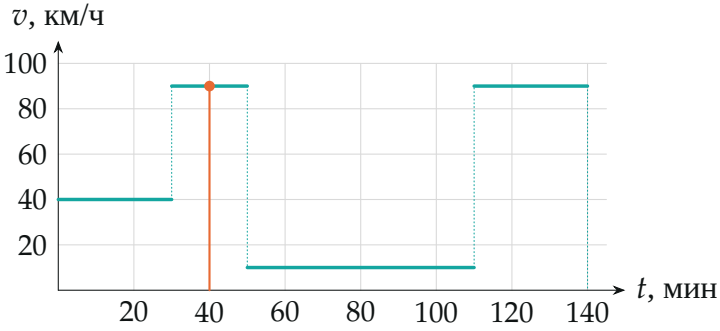
Пункт 5. Скорость на участке — путь участка, делённый на его время:

$$v_1 = \frac{20\text{ км}}{0{,}5\text{ ч}} = 40\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}, \quad v_2 = \frac{30\text{ км}}{\frac{1}{3}\text{ ч}} = 90\ \frac{\text{км}}{\text{ч}},$$

$$v_3 = \frac{10\text{ км}}{1\text{ ч}} = 10\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}, \quad v_4 = \frac{45\text{ км}}{0{,}5\text{ ч}} = 90\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

40-я минута лежит на втором участке (от 30-й до 50-й минуты), поэтому мгновенная скорость там 90 км/ч.

Пункт 6. Наименьшая мгновенная скорость — на третьем участке, 10 км/ч; на последнем — 90 км/ч. Отношение $90/10 = 9$.



Мгновенная скорость по участкам. Морковная черта — 40-я минута

Пункт 7. Средняя скорость за первую половину пути (до её середины M) — весь путь до середины, делённый на всё время до неё. Половина пути 52,5 км: первый участок (20 км за 30 мин), второй (30 км за 20 мин) и ещё 2,5 км третьего участка со скоростью 10 км/ч, то есть за 0,25 ч $=$ 15 мин. Всего 65 мин:

$$\bar{v} = \frac{52{,}5\text{ км}}{\frac{65}{60}\text{ ч}} \approx 48{,}5\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Обратите внимание: средняя скорость — не среднее арифметическое скоростей участков: $(40 + 90 + 10)/3 \approx 47$ км/ч — другое число. Делить нужно весь путь на всё время.

Проверка. Сумма путей участков: $20 + 30 + 10 + 45 = 105$ км, сумма времён $30 + 20 + 60 + 30 = 140$ мин — совпадает с пунктами 3 и 4. Средняя скорость за последний час: $\frac{(60-55)+45}{1} = 50$ км/ч (5 км на третьем участке за 30 мин и 45 км на четвёртом) — как в условии. Средняя скорость в B: $\frac{50\text{ км}}{50\text{ мин}} = 60$ км/ч, в C: $\frac{60\text{ км}}{110\text{ мин}} \approx 32{,}7$ км/ч — действительно наибольшая и наименьшая.

Физический смысл: средняя скорость растёт, пока автомобиль едет быстрее своей средней, и падает, когда медленнее; поэтому её экстремумы — в моментах смены скорости.

Ответ. 1) 10 мин; 2) $S_0 = 5$ км; 3) 140 мин (2 ч 20 мин); 4) 105 км; 5) 90 км/ч; 6) в 9 раз; 7) $\approx 48{,}5$ км/ч.