Газировка

Задача 3. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 7 класс, задача 3] «Газировка».

В ходе важного научного исследования был проведён опыт. В специальный стакан налили сладкую воду, после чего стали создавать в ней пузырьки газа. Постепенно увеличивая концентрацию пузырьков, исследователи фиксировали массу и объём газировки в стакане. Результат был занесён в таблицу:

Концентрация пузырьков, мм$^{-3}$	0	10	20	30
Масса, г	90	90	90	?
Объём, мл	90	99	110	110

Определите:

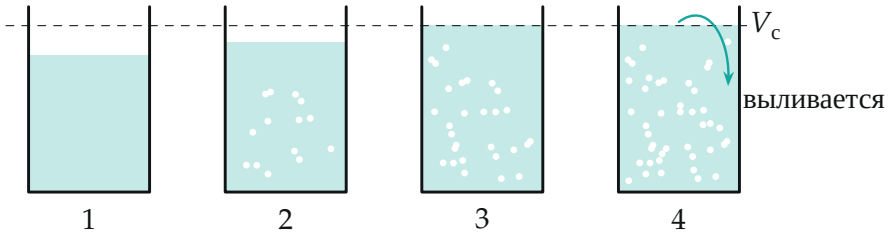
1. плотность сладкой воды $\rho_в$;
2. объём стакана $V_с$;
3. объём одного пузырька V_0;
4. к сожалению, значение массы в последнем столбце оказалось утеряно. Используя уцелевшие данные, восстановите его.

Считайте, что размеры пузырьков одинаковые.

Примечание: концентрацией пузырьков n называют количество пузырьков в единице объёма.

▲ **Решение. Что происходит.** Пузырьки почти ничего не весят, но занимают место: вода та же, а объём газировки растёт. Пока газировка помещается в стакан, масса не меняется; когда объём упирается в объём стакана, лишняя газировка выливается, и масса начинает падать. Главная идея — разделить объём газировки на объём воды и объём пузырьков.

Обозначения. V — объём газировки, $V_в$ — объём сладкой воды в ней, N — число пузырьков, $n = N/V$ — концентрация, V_0 — объём одного пузырька; m — масса газировки, массой газа в пузырьках пренебрегаем. Номер столбца таблицы — индекс $1 \ldots 4$.



Газировка в столбцах 1–4 таблицы: с ростом n уровень поднимается до края стакана, дальше лишнее выливается

Пункт 1. Плотность воды. В первом столбце пузырьков нет, в стакане только сладкая вода, поэтому по определению плотности

$$\rho_в = \frac{m_1}{V_1} = \frac{90\text{ г}}{90\text{ мл}} = 1\text{ г/мл}.$$

Пункт 2. Объём стакана. Сравним столбцы 3 и 4: концентрация пузырьков выросла с 20 до 30 мм$^{-3}$, а объём остался 110 мл. Если бы газировка помещалась, при той же воде и большем числе пузырьков объём вырос бы. Значит, объём упёрся в край стакана, и лишнее вылилось:

$$V_с = 110\text{ мл}.$$

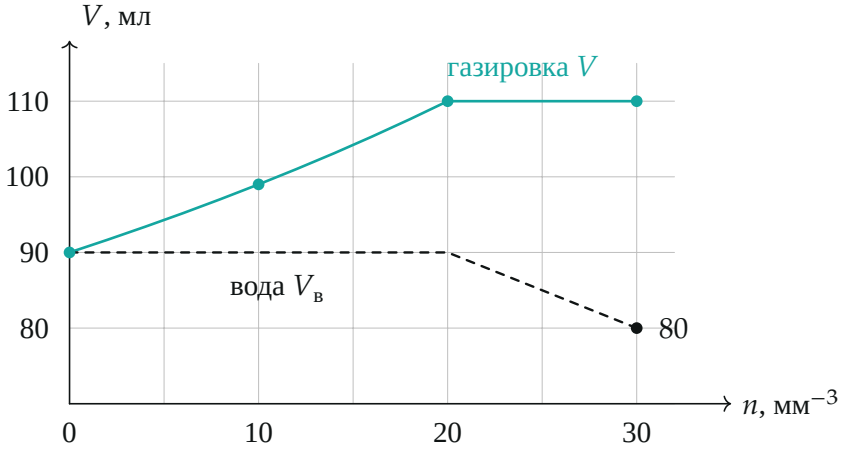
Пункт 3. Объём пузырька. Объём газировки — это вода плюс все пузырьки:

$$V = V_в + NV_0 = V_в + nV\,V_0 \quad \Rightarrow \quad V_в = V\,(1 - nV_0).$$

Пока ничего не вылилось (столбцы 1–3), вода та же: $V_в = 90$ мл, ведь масса 90 г и $\rho_в = 1$ г/мл. Возьмём столбец 2 ($n_2 = 10$ мм$^{-3}$, $V_2 = 99$ мл):

$$V_0 = \frac{1}{n_2}\left(1 - \frac{V_в}{V_2}\right) = \frac{1}{10\text{ мм}^{-3}} \cdot \frac{9}{99} = \frac{1}{110}\text{ мм}^3 \approx 0{,}009\text{ мм}^3.$$

Тот же результат даёт столбец 3: $V_в/(1 - n_3V_0) = 90/(1 - 20/110) = 110$ мл — в точности объём из таблицы. Значит, в столбце 3 газировка налита ровно до края и ещё не выливалась.



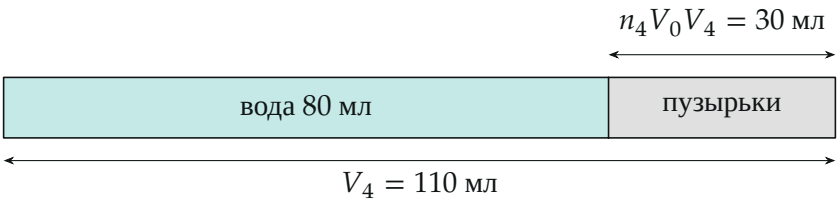
Объём газировки $V = V_в/(1 - nV_0)$ (сплошная, посчитано по найденному V_0) и объём воды в стакане (пунктир); точки — столбцы таблицы

Пункт 4. Потерянная масса. В столбце 4 стакан полон: $V_4 = V_с = 110$ мл, $n_4 = 30$ мм$^{-3}$. Из той же связи объёмов найдём, сколько воды в нём осталось:

$$V_{в4} = V_4\,(1 - n_4 V_0) = 110\text{ мл} \cdot \left(1 - \frac{30}{110}\right) = 80\text{ мл}.$$

Масса газировки — это масса воды:

$$m_4 = \rho_в V_{в4} = 1\text{ г/мл} \cdot 80\text{ мл} = 80\text{ г}.$$



Из чего состоит газировка в столбце 4

Обратите внимание: массу нельзя искать как «плотность газировки из столбца 3, умноженная на 110 мл» — плотность газировки зависит от концентрации пузырьков, а в столбце 4 она другая.

Соберём ответ одной формулой:

$$m_4 = \rho_в V_с \left(1 - \frac{n_4}{n_2}\left(1 - \frac{V_в}{V_2}\right)\right) = 80\text{ г}.$$

Проверка. Второй способ — через плотность газировки $\rho = m/V = \rho_в(1 - nV_0)$: в столбце 4 $\rho_4 = \frac{8}{11}\rho_в$, и $m_4 = \rho_4 V_с = 80$ г. Знак верный: пузырьков больше — воды в полном стакане меньше, 80 г $<$ 90 г. Доля пузырьков в столбце 4 $n_4 V_0 = 3/11$ — около четверти объёма, это реальная пена, а не капля газа.

Ответ. 1) $\rho_в = 1$ г/мл; 2) $V_с = 110$ мл; 3) $V_0 = \frac{1}{110}$ мм^3 $\approx 0{,}009$ мм^3; 4) $m = 80$ г.