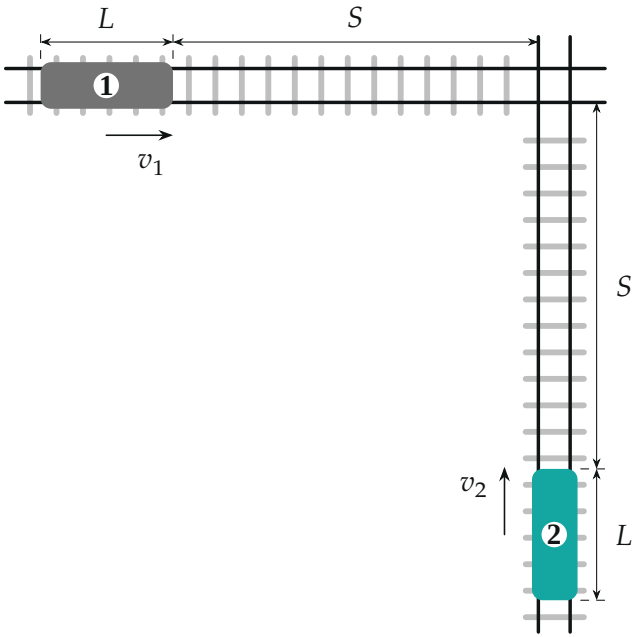
Грешные приборы

Задача 4. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 7 класс, задача 4] «Грешные приборы».

Ни один реальный прибор не даёт возможности провести измерения с совершенной точностью. Поэтому в физике вводится понятие абсолютной погрешности прибора (чаще всего её обозначают Δ). Полученный результат измерений (назовём его A) следует понимать как интервал возможных значений. То есть реальное значение R измеряемой величины может быть любым в интервале $A - \Delta \leqslant R \leqslant A + \Delta$.

Два грузовых поезда движутся с постоянными скоростями по пересекающимся железнодорожным путям в направлении перекрёстка. При этом они оба находятся на расстоянии $S = 7$ км от перекрёстка. Длина поездов одинакова: $L = 1$ км. Считайте, что S и L измерены с очень высокой точностью.

У локомотива первого поезда неисправен прибор для измерения скорости, поэтому машинист вынужден вычислять скорость, пользуясь подручными средствами. У него есть часы, которые позволяют измерить время с погрешностью $\Delta\tau = 2$ с. Также он может определять пройденное расстояние, ориентируясь по столбам, которые установлены через каждые $d = 200$ м вдоль путей, с погрешностью $\Delta d = 10$ м. Он замерил время прохождения между двумя соседними столбами и получил значение $\tau = 12$ с.



1. Исходя из данных, полученных машинистом первого поезда, определите, в каком диапазоне находится скорость его состава.
2. Какую скорость (в км/ч) должен показывать исправный спидометр второго поезда, имеющий погрешность $\Delta v = 1$ км/ч, чтобы на перекрёстке гарантированно не произошло столкновение?

▲ **Решение. Что происходит.** Машинист не знает ни точного пути, ни точного времени: путь лежит в интервале $d \pm \Delta d$, время — в интервале $\tau \pm \Delta\tau$. Скорость первого поезда поэтому тоже интервал. Поезда не столкнутся, если перекрёсток занят ими в непересекающиеся промежутки времени. Главная идея — требовать это для *худшего* значения каждой неизвестной величины: и скорости первого поезда, и истинной скорости второго.

Обозначения. v_1 — истинная скорость первого поезда, v_2 — истинная скорость второго, u — показание спидометра второго поезда, так что $u - \Delta v \leqslant v_2 \leqslant u + \Delta v$.

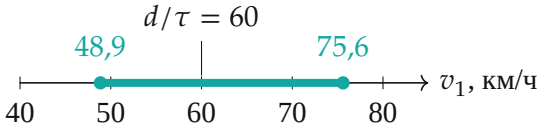
1. Диапазон скорости первого поезда. Скорость равномерного движения $v_1 = d_{\text{ист}}/\tau_{\text{ист}}$. Она наибольшая, когда путь наибольший, а время

наименьшее, и наименьшая — наоборот:

$$v_{1\,\max} = \frac{d + \Delta d}{\tau - \Delta\tau} = \frac{210\text{ м}}{10\text{ с}} = 21\text{ м/с} = 75{,}6\text{ км/ч},$$

$$v_{1\,\min} = \frac{d - \Delta d}{\tau + \Delta\tau} = \frac{190\text{ м}}{14\text{ с}} \approx 13{,}57\text{ м/с} \approx 48{,}9\text{ км/ч}.$$

Обратите внимание: интервал несимметричен относительно «наивного» значения $d/\tau = 16{,}7$ м/с $= 60$ км/ч — деление на $\tau - \Delta\tau$ увеличивает скорость сильнее, чем деление на $\tau + \Delta\tau$ уменьшает.



Возможные значения скорости первого поезда

2. Когда перекрёсток занят. Перекрёсток занят поездом от момента, когда голова поезда дошла до перекрёстка (прошла S), до момента, когда его прошёл хвост (голова прошла $S + L$). Для поезда со скоростью v это промежуток

$$\frac{S}{v} \leqslant t \leqslant \frac{S + L}{v}.$$

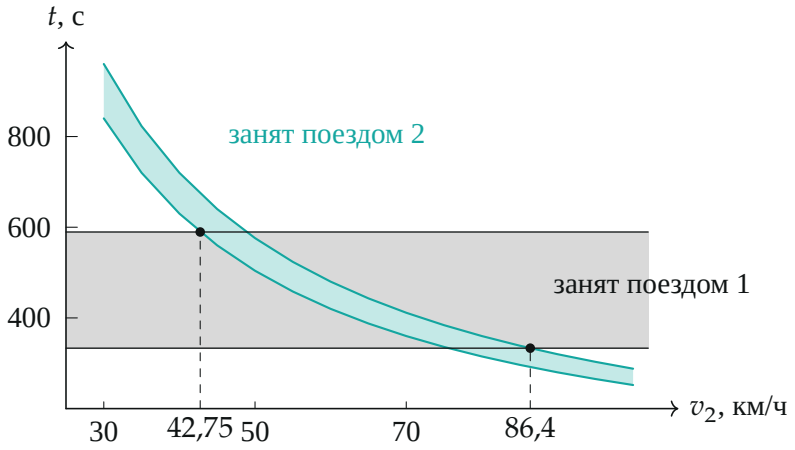
Столкновения нет, если один поезд полностью проехал перекрёсток раньше, чем к нему подошёл другой. Вариантов два.

а) Второй проезжает первым. Хвост второго должен пройти перекрёсток раньше, чем к нему подойдёт голова первого, даже самого быстрого:

$$\frac{S + L}{v_2} < \frac{S}{v_{1\,\max}} \quad \Rightarrow \quad v_2 > \frac{S + L}{S} v_{1\,\max} = \frac{8}{7} \cdot 75{,}6\text{ км/ч} = 86{,}4\text{ км/ч}.$$

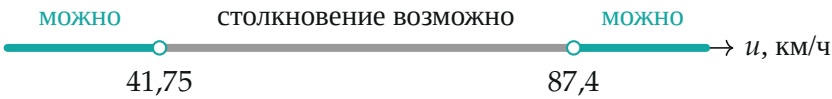
б) Первый проезжает первым. Хвост первого, даже самого медленного, должен пройти перекрёсток раньше, чем подойдёт голова второго:

$$\frac{S + L}{v_{1\,\min}} < \frac{S}{v_2} \quad \Rightarrow \quad v_2 < \frac{S}{S + L} v_{1\,\min} = \frac{7}{8} \cdot 48{,}86\text{ км/ч} \approx 42{,}75\text{ км/ч}.$$



Серая полоса — все моменты, когда перекрёсток может быть занят первым поездом (от $S/v_{1\,\max}$ до $(S+L)/v_{1\,\min}$); бирюзовая — когда он занят вторым при скорости v_2 (от S/v_2 до $(S+L)/v_2$). Полосы не перекрываются при $v_2 < 42{,}75$ и $v_2 > 86{,}4$ км/ч

3. Учёт погрешности спидометра. Истинная скорость второго поезда может отличаться от показания u на Δv в любую сторону. Условие должно выполняться и для худшего случая. В варианте а) худшее — истинная скорость меньше показания: $u - \Delta v > 86{,}4$ км/ч, то есть $u > 87{,}4$ км/ч. В варианте б) худшее — истинная скорость больше: $u + \Delta v < 42{,}75$ км/ч, то есть $u < 41{,}75$ км/ч.



Допустимые показания спидометра второго поезда (концы не входят)

Соберём ответ:

$$u < \frac{S}{S+L} \cdot \frac{d-\Delta d}{\tau+\Delta\tau} - \Delta v \approx 41{,}75 \text{ км/ч}$$

или

$$u > \frac{S+L}{S} \cdot \frac{d+\Delta d}{\tau-\Delta\tau} + \Delta v = 87{,}4 \text{ км/ч}.$$

Проверка. Подставим границу $u = 87{,}4$ км/ч: истинная скорость не меньше 86,4 км/ч $= 24$ м/с, хвост второго проходит перекрёсток за $8000/24 \approx 333$ с — ровно тогда же, когда к нему подходит голова самого быстрого первого поезда ($7000/21 \approx 333$ с). Граница $u = 41{,}75$ км/ч: $v_2 \leqslant 42{,}75$ км/ч $\approx 11{,}875$ м/с, голова второго приходит не раньше $7000/11{,}875 \approx 589$ с, а хвост самого медленного первого уходит в $8000/13{,}57 \approx 589$ с. Смысл: чем грубее приборы, тем шире «запретная» полоса скоростей, и машинисту приходится ехать заметно медленнее или быстрее, чем при точных измерениях.

Ответ. 1) от $\dfrac{d - \Delta d}{\tau + \Delta\tau} \approx 13{,}6$ м/с $\approx 48{,}9$ км/ч до $\dfrac{d + \Delta d}{\tau - \Delta\tau} = 21$ м/с $= 75{,}6$ км/ч; 2) спидометр должен показывать меньше 41,75 км/ч или больше 87,4 км/ч.