Гайки

Задача 2. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 8 класс, задача 2 (практический тур)] «Гайки».

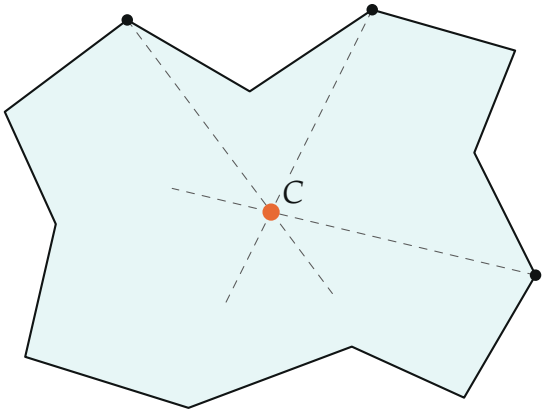
1. Вырежьте из листа бумаги распечатанную фигуру по контуру. Определите координаты центра масс вырезанной фигуры. Постарайтесь сделать это с наибольшей точностью. Оцените погрешность определения координат центра масс.
2. Найдите массу одной из гаек.

Оборудование: лист бумаги с поверхностной плотностью $\sigma_0 = 80$ г/м^2 с напечатанной на нём фигурой неправильной формы с нанесённой миллиметровой сеткой, два листа картона, ножницы, кусок нитки, кнопка канцелярская, две одинаковые гайки, линейка или сантиметровая лента, лист миллиметровой бумаги для построения графика. Поверхностная плотность листа картона считается известной и равной $\sigma = 250$ г/м^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Две классические идеи статики. Первая: тело, подвешенное за одну точку, в равновесии висит так, что центр масс лежит на вертикали под точкой подвеса (иначе сила тяжести создаёт момент и поворачивает тело). Две-три такие вертикали пересекаются в центре масс. Вторая: правило моментов для рычага — фигуры из картона, лежащей на краю стола, с гайкой на другом конце; массу фигуры знаем по её площади и поверхностной плотности, и гайку можно «взвесить» без весов. Весов в оборудовании нет — в этом и смысл задачи.

Обозначения. C — центр масс фигуры; S — площадь фигуры; $m = \sigma S$ — масса картонной фигуры, M — масса гайки; l — расстояние по горизонтали от края стола до C, L — от края стола до нити с гайкой.

Пункт 1. Центр масс. Фигуру прокалываем кнопкой у края, подвешиваем на кнопке так, чтобы она свободно поворачивалась, а на ту же кнопку вешаем нить с гайкой — это отвес. Когда фигура успокоится, отмечаем на ней линию нити. Повторяем для двух-трёх других точек подвеса, по возможности далёких друг от друга. Условие равновесия фигуры (сумма моментов относительно точки подвеса равна нулю) требует, чтобы центр масс лежал на каждой отвесной линии, поэтому линии пересекаются в C.



Линии отвеса от трёх точек подвеса пересекаются в центре масс C

На деле линии пересекаются не в точке, а образуют маленький треугольник: нить толстая, бумага гнётся, фигура трётся о кнопку. Центр масс — середина этой области, погрешность — её размер. Бумага при подвешивании прогибается, поэтому точнее перенести контур на картон, вырезать картонную фигуру, найти центр масс на ней и перенести точку обратно на бумагу с миллиметровой сеткой. У организаторов получилось (оси сетки на распечатке)

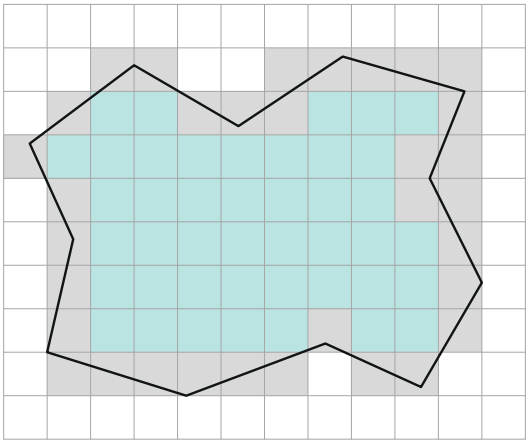
$$x = (9{,}1 \pm 0{,}2)\ \text{см}, \qquad y = (5{,}8 \pm 0{,}2)\ \text{см}.$$

Пункт 2. Масса гайки. 1. Масса картонной фигуры. Площадь находим палеткой (миллиметровая сетка, клетки по 1 см^2): целые клетки внутри контура считаем полностью, клетки, пересечённые контуром, — в среднем за половину. У организаторов 256 целых и 57 пересечённых клеток:

$$S = 256 + \tfrac{1}{2} \cdot 57 = 284{,}5\ \text{см}^2,$$

$$m = \sigma S = 250\ \frac{\text{г}}{\text{м}^2} \cdot 284{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 \approx 7{,}11\ \text{г}.$$

(Бумажная фигура весит $\sigma_0 S \approx 2{,}28$ г — она лёгкая и гнётся, рычаг из неё хуже.)

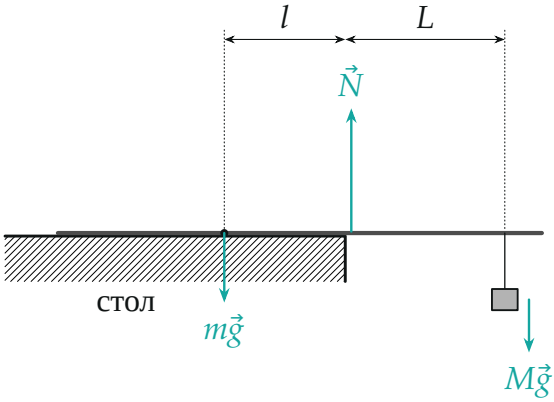


Метод палетки (схема, клетки крупнее настоящих): бирюзовые клетки — целые, серые — пересечённые контуром, каждая считается за половину

2. Рычаг. Картонную фигуру кладём на край стола, к ней на нити подвешиваем гайку так, чтобы она висела за краем. Сдвигаем фигуру к краю, пока она не окажется на грани опрокидывания: стол тогда давит на фигуру только у самого края. Запишем правило моментов относительно края стола (сила реакции стола $\vec{N}$ момента не даёт — поэтому ось и выбрана на краю):

$$mg\,l = Mg\,L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{m}{M}\,l.$$

Меняя точку крепления гайки, получаем ряд пар $(l,\,L)$: график $L(l)$ — прямая через начало координат с наклоном $k = m/M$.



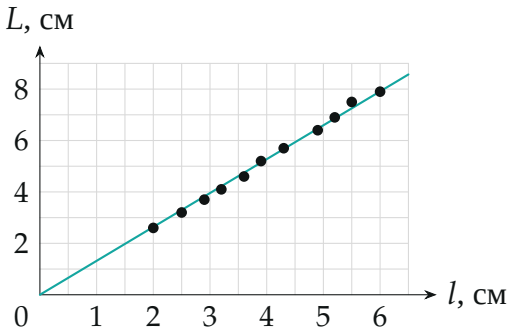
Рычаг на краю стола в момент начала опрокидывания (длины стрелок — по найденным массам)

3. Обработка. Данные организаторов:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
l, см	6,0	5,5	5,2	4,9	4,3	3,9	3,6	3,2	2,9	2,5	2,0
L, см	7,9	7,5	6,9	6,4	5,7	5,2	4,6	4,1	3,7	3,2	2,6

Наклон прямой $L = kl$ через начало координат по методу наименьших квадратов:

$$k = \frac{\sum l_i L_i}{\sum l_i^2} \approx 1{,}32 \pm 0{,}01.$$



Зависимость $L(l)$: точки — измерения, прямая — $L = 1{,}32\,l$

Масса гайки:

$$M = \frac{m}{k} = \frac{7{,}11\ \text{г}}{1{,}32} \approx 5{,}4\ \text{г}.$$

Погрешность: наклон определён с точностью около 1%; площадь по палетке — около 2% (57 пересечённых клеток, у каждой ошибка до половины клетки, но ошибки разных знаков частично гасятся: $\sim \sqrt{57} \cdot 0{,}3 \approx 2$ см^2, ещё столько же даёт неточный вырез ножницами). Итого $M = (5{,}4 \pm 0{,}2)$ г.

Обратите внимание: у организаторов в решении масса картонной фигуры 7,28 г — она посчитана с плотностью картона 256 г/м^2, а не с 250 г/м^2 из условия; поэтому у них $M \approx 5{,}5$ г. С плотностью из условия получается 5,4 г; разница меньше погрешности.

Проверка. Второй способ — по одному измерению с наибольшими плечами: $M = m\frac{l}{L} = 7{,}11 \cdot \frac{6{,}0}{7{,}9} \approx 5{,}40$ г, совпадает с графиком. Знак: $L > l$, значит, гайка легче фигуры, $M < m$ — так и есть.

Физический смысл: картонная фигура известной площади работает гирей, а край стола — осью весов.

Ответ. 1) $x = (9{,}1 \pm 0{,}2)$ см, $y = (5{,}8 \pm 0{,}2)$ см (для фигуры организаторов); 2) $M \approx 5{,}4$ г (с $\sigma = 250$ г/м^2 из условия; у организаторов с 256 г/м^2 — 5,5 г).