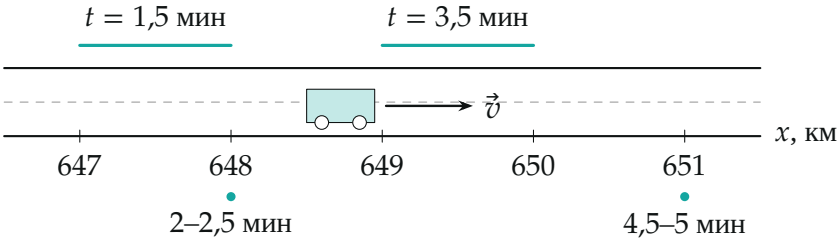
Когда-то где-то

Задача 1. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 8 класс, задача 1] «Когда-то где-то».

Когда-то где-то по прямому шоссе двигался равномерно автомобиль. Координаты автомобиля и моменты времени определял спутник GPS: иногда с погрешностью, иногда — точно. Известно, что через 1,5 минуты от начала наблюдения его координата была равна $(647{,}5 \pm 0{,}5)$ км, а через 3,5 минуты — $(649{,}5 \pm 0{,}5)$ км. Ещё известно, что в точке с координатой 648 км автомобиль был через $(2{,}25 \pm 0{,}25)$ минуты от начала наблюдения, а в точке с координатой 651 км — через $(4{,}75 \pm 0{,}25)$ минуты. Определите:

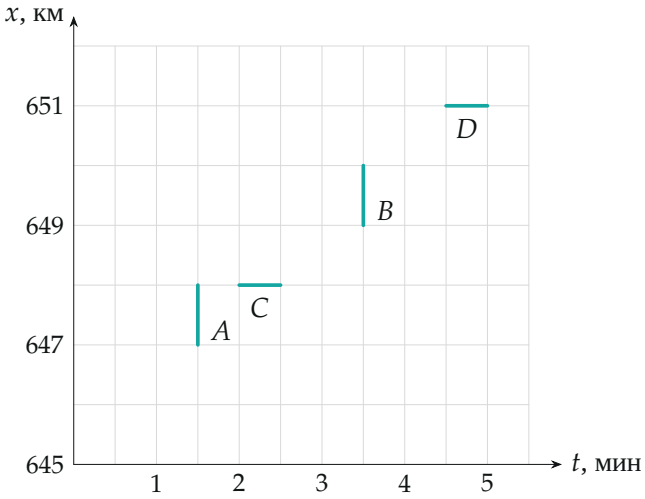
1. максимально возможную и минимально возможную скорости автомобиля;
2. путь автомобиля за 3 минуты;
3. положение автомобиля через 3 минуты 15 с от начала наблюдения.



Поясняющий рисунок: что известно о движении. Сверху — координаты с погрешностью в известные моменты, снизу — известные точки с погрешностью момента

▲ **Решение.** **Что происходит.** Движение равномерное, значит, график $x(t)$ — прямая, а её угловой коэффициент — скорость. Каждое измерение с погрешностью на плоскости (t, x) — не точка, а отрезок: вертикальный, если неточна координата, горизонтальный, если неточно время. Истинный график обязан пересечь все четыре отрезка. Главная идея: все ответы — это крайние положения прямой, которая ещё проходит через все отрезки. Задача графическая, класс — «коридор погрешностей».

Обозначения. t — время от начала наблюдения в минутах, x — координата в километрах; отрезки измерений: A ($t = 1{,}5$ мин, $647 \le x \le 648$), B ($t = 3{,}5$ мин, $649 \le x \le 650$), C ($x = 648$, $2 \le t \le 2{,}5$), D ($x = 651$, $4{,}5 \le t \le 5$). Прямая $x(t) = x_0 + vt$.



Данные условия на плоскости (t, x): четыре отрезка, через которые проходит график

Пункт 1. 1. Самая крутая прямая. Поворачиваем прямую, увеличивая наклон, пока она не упрётся в концы отрезков. Крутизне мешают два конца: снизу слева — нижний конец A $(1{,}5;\ 647)$ (ниже прямая уже не пересечёт A), сверху справа — левый конец D $(4{,}5;\ 651)$ (правее прямая пройдёт выше D, не задев его). Прямая через эти две точки:

$$v_{\max} = \frac{651 - 647}{4{,}5 - 1{,}5}\ \frac{\text{км}}{\text{мин}} = \frac{4}{3}\ \frac{\text{км}}{\text{мин}} = 80\ \text{км/ч}.$$

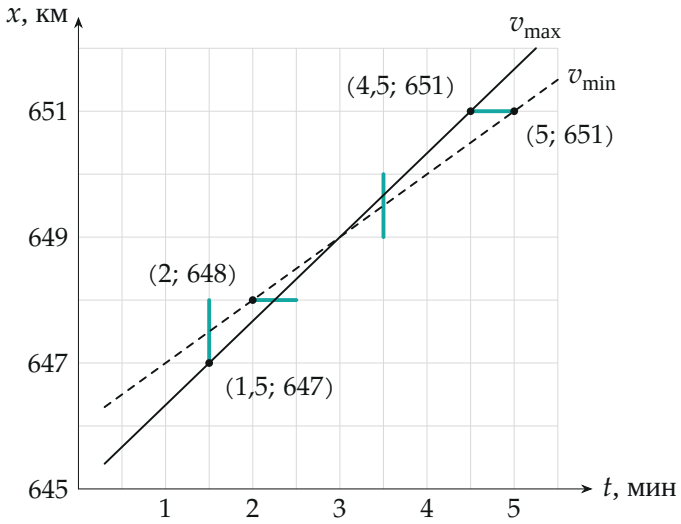
Проверим, что она пересекает остальные отрезки: $x(t) = 645 + \frac{4}{3}t$, при $t = 3{,}5$ мин $x = 649{,}67$ км — внутри B; $x = 648$ км при $t = 2{,}25$ мин — внутри C.

2. Самая пологая прямая. Теперь мешают левый конец C $(2;\ 648)$ и

правый конец D $(5;\ 651)$:

$$v_{\min} = \frac{651 - 648}{5 - 2}\ \frac{\text{км}}{\text{мин}} = 1\ \frac{\text{км}}{\text{мин}} = 60\ \text{км/ч}.$$

Проверка остальных: $x(t) = 646 + t$, $x(1{,}5) = 647{,}5$ км — внутри A, $x(3{,}5) = 649{,}5$ км — внутри B.



Сплошная — самая крутая прямая ($v_{\max}$), штриховая — самая пологая ($v_{\min}$). Каждая упирается в концы двух отрезков

Пункт 2. При равномерном движении путь за время $\tau = 3$ мин равен $l = v\tau$. Скорость лежит между $v_{\min}$ и $v_{\max}$, поэтому

$$l_{\min} = v_{\min}\tau = 1 \cdot 3\ \text{км} = 3\ \text{км}, \qquad l_{\max} = v_{\max}\tau = \tfrac{4}{3} \cdot 3\ \text{км} = 4\ \text{км},$$

то есть $3\ \text{км} \le l \le 4\ \text{км}$, или $l = (3{,}5 \pm 0{,}5)$ км.

Пункт 3. Теперь ищем не крайний наклон, а крайнее значение x при $t = 3{,}25$ мин. Это другие прямые: момент 3,25 мин лежит между отрезками, и прямую нужно прижать к концам, лежащим по разные стороны от него.

1. Самое большое x. Прямую поднимаем в точке $t = 3{,}25$; слева её держит снизу левый конец C $(2;\ 648)$, справа сверху — левый конец D

(4,5; 651). Её наклон $\dfrac{651-648}{4{,}5-2} = 1{,}2$ км/мин, и

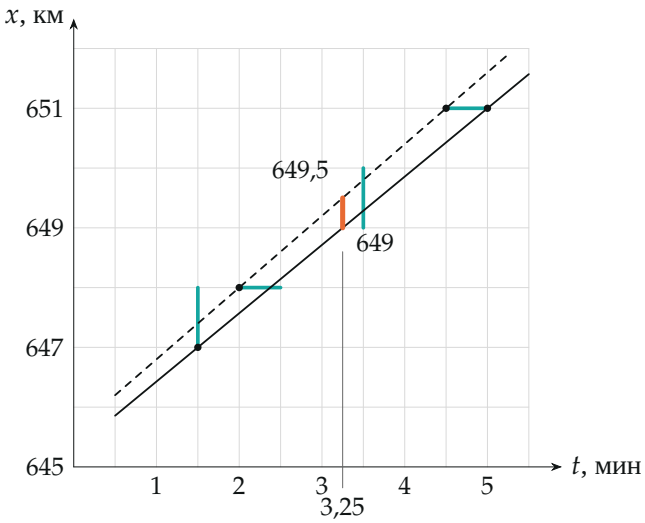
$$x_{\max} = 648 + 1{,}2 \cdot (3{,}25 - 2)\ \text{км} = 649{,}5\ \text{км}.$$

Остальные отрезки она пересекает: $x(1{,}5) = 647{,}4$ км (внутри A), $x(3{,}5) = 649{,}8$ км (внутри B).

2. Самое маленькое x. Прямую опускаем; держат её нижний конец A (1,5; 647) и правый конец D (5; 651). Наклон $\dfrac{4}{3{,}5} = \dfrac{8}{7}$ км/мин,

$$x_{\min} = 647 + \frac{8}{7} \cdot (3{,}25 - 1{,}5)\ \text{км} = 649\ \text{км}.$$

Проверка: $x(3{,}5) = 649{,}29$ км (внутри B), $x = 648$ км при $t = 2{,}375$ мин (внутри C).



Штриховая прямая даёт наибольшую координату при $t = 3{,}25$ мин, сплошная — наименьшую. Морковный отрезок — все возможные положения автомобиля

Обратите внимание: прямые пункта 3 не совпадают с прямыми пункта 1. Крайняя скорость и крайнее положение в заданный момент

— разные вопросы, и для каждого прямую надо прижимать к своим концам отрезков.

Соберём ответ пункта 3: 649 км $\leq x \leq$ 649,5 км, то есть $x = (649{,}25 \pm 0{,}25)$ км.

Проверка. Перебор всех прямых $x_0 + vt$, пересекающих четыре отрезка (на python, по вершинам допустимой области): наибольший наклон $4/3$ км/мин, наименьший 1 км/мин, $x(3{,}25)$ от 649 до 649,5 км — совпадает.

Физический смысл: погрешность измерений превращается в коридор, и любая величина, которую мы ищем, тоже получается интервалом.

Ответ. 1) $v_{\max} = 80$ км/ч, $v_{\min} = 60$ км/ч; 2) 3 км $\leq l \leq 4$ км, $l = (3{,}5 \pm 0{,}5)$ км; 3) $x = (649{,}25 \pm 0{,}25)$ км.