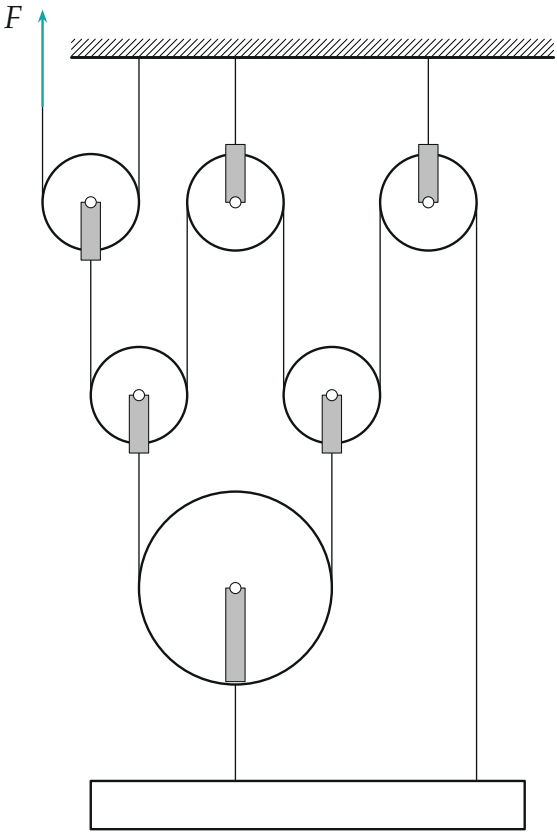
Выигрышные блоки

Задача 2. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 8 класс, задача 2] «Выигрышные блоки».

Для систем, состоящих из нитей, подвижных и неподвижных блоков, применяемых для подъёма грузов, можно ввести понятие выигрыша в силе k. Он показывает, во сколько раз сила тяжести груза массой M превышает силу F, необходимую для его равномерного подъёма, то есть $k = \dfrac{Mg}{F}$.



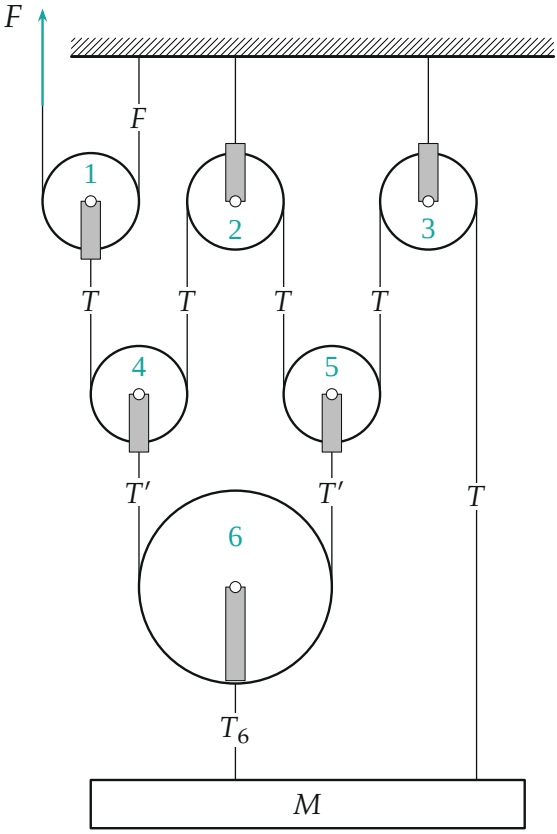
На рисунке представлена система, состоящая из нерастяжимых нитей пренебрежимо малой массы и шести блоков. Пусть данная система при равномерном подъёме груза массой M даёт выигрыш в силе $k = 4$.

1. Какой выигрыш k_1 она даст при равномерном подъёме груза $M_1 = 3{,}5M$?
2. Какой максимальный выигрыш $k_{\max}$ в силе сможет дать такая система при равномерном подъёме груза?
3. Для каких масс грузов эта система может дать выигрыш в силе?

Трение в блоках отсутствует. Свободные участки нитей вертикальны. Два подвижных блока, расположенных на одной горизонтали, одинаковы. Считайте, что сила натяжения каждой нити постоянна по всей её длине.

▲ **Решение. Что происходит.** Выигрыш $k = 4$ при M заметно меньше, чем дала бы такая система с невесомыми блоками, — значит, блоки весомые, и часть силы F уходит на их подъём. Груз движется равномерно, поэтому каждый подвижный блок и груз находятся в равновесии: сумма сил на каждый равна нулю. Это задача на равновесие системы блоков: идём от нити с силой F к грузу, блок за блоком, и получаем связь F с массой груза. Массы блоков по отдельности не нужны — войдёт одна их комбинация, а её даёт условие $k = 4$.

Обозначения. Блоки пронумеруем, как на рисунке: 1 — подвижный слева сверху, 2 и 3 — неподвижные, 4 и 5 — подвижные одинаковые ($m_4 = m_5$), 6 — большой подвижный; m_i — масса i-го блока. Нитей четыре: на первой — сила F, на второй (от оси блока 1 через блоки 4, 2, 5, 3 к грузу) — натяжение T, на третьей (от оси блока 4 под блоком 6 к оси блока 5) — T', на четвёртой (от оси блока 6 к грузу) — T_6. Масса груза в общем случае — $M_{\text{гр}}$.



Номера блоков и натяжения нитей. Натяжение каждой нити одно по всей длине

1. Равновесие подвижных блоков. Запишем условие равномерного движения (сумма сил равна нулю) в проекции на вертикаль для каждого подвижного блока. Блок 1: вверх тянут два конца первой нити, вниз — сила тяжести и вторая нить, привязанная к оси:

$$2F = T + m_1 g \quad \Rightarrow \quad T = 2F - m_1 g.$$

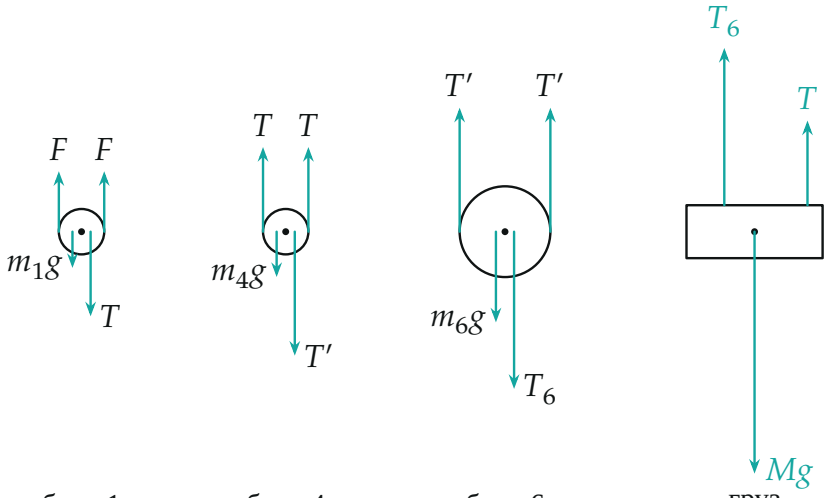
Блок 4 (и такой же блок 5): вверх — два конца второй нити, вниз — сила тяжести и третья нить:

$$2T = T' + m_4 g \quad \Rightarrow \quad T' = 4F - 2m_1 g - m_4 g.$$

Блок 6: вверх — два конца третьей нити, вниз — сила тяжести и четвёртая нить:

$$2T' = T_6 + m_6 g \quad \Rightarrow \quad T_6 = 8F - 4m_1 g - 2m_4 g - m_6 g.$$

Неподвижные блоки 2 и 3 только поворачивают вторую нить, её натяжение не меняется (трения нет).



блок 1 блок 4 блок 6 груз

Силы на подвижные блоки и груз. Длины стрелок — для примера масс блоков, при которых $k = 4$

2. Равновесие груза. На груз вверх действуют вторая нить (T) и четвёртая (T_6), вниз — сила тяжести:

$$T + T_6 = M_{\text{гр}} g \quad \Rightarrow \quad 10F - (5m_1 + 2m_4 + m_6)g = M_{\text{гр}} g.$$

Обозначим $m = 5m_1 + 2m_4 + m_6$ — это единственная комбинация масс блоков, которая влияет на ответ. Получаем

$$F = \frac{(M_{\text{гр}} + m)g}{10}, \qquad k = \frac{M_{\text{гр}} g}{F} = \frac{10M_{\text{гр}}}{M_{\text{гр}} + m}.$$

Отсюда видно: невесомые блоки ($m = 0$) дали бы $k = 10$; весомые уменьшают выигрыш.

3. Масса блоков из условия $k = 4$. Подставим $M_{\text{гр}} = M$, $k = 4$:

$$4 = \frac{10M}{M + m} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{3}{2}M.$$

Пункт 1. Для груза $M_1 = 3{,}5M$:

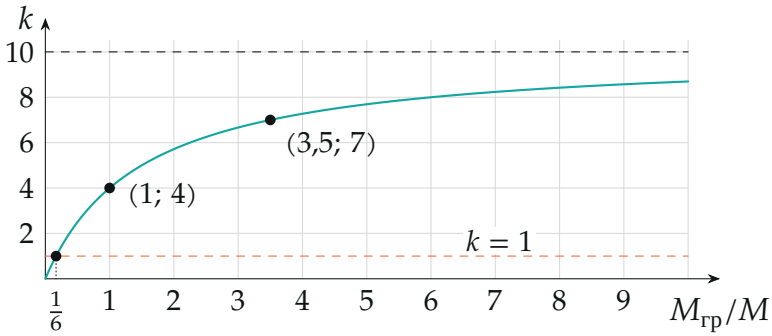
$$k_1 = \frac{10 \cdot 3{,}5M}{3{,}5M + 1{,}5M} = \frac{35}{5} = 7.$$

Пункт 2. Выигрыш $k = \dfrac{10}{1 + m/M_{\text{гр}}}$ растёт с массой груза: чем тяжелее груз, тем меньшую долю силы занимает подъём блоков. Он приближается к 10 при $M_{\text{гр}} \gg m$, но не достигает его. Поэтому $k_{\max} = 10$ — предельное значение, выигрыш идеальной системы.

Пункт 3. Выигрыш есть, когда $k > 1$:

$$\frac{10M_{\text{гр}}}{M_{\text{гр}} + \frac{3}{2}M} > 1 \quad \Rightarrow \quad 9M_{\text{гр}} > \frac{3}{2}M \quad \Rightarrow \quad M_{\text{гр}} > \frac{M}{6}.$$

При $M_{\text{гр}} = M/6$ система выигрыша не даёт ($k = 1$), при более лёгком грузе — проигрыш: тянуть приходится сильнее, чем весит груз.



Выигрыш k от массы груза; штрих сверху — предел $k = 10$

Обратите внимание: массы блоков входят в m с разными множителями: m_1 — с множителем 5, m_4 и m_5 — по 1, m_6 — 1. Это не случайность: множитель равен тому, во сколько раз блок движется быстрее груза (см. проверку). Поэтому знать нужно не массы блоков по отдельности, а только комбинацию m, и условие $k = 4$ её даёт.

Проверка. Второй способ — закон сохранения энергии (работа силы F равна приросту потенциальной энергии груза и блоков, кинетическая не меняется). Пусть груз поднялся на Δh. Ось блока 6 связана с грузом нитью и тоже поднялась на Δh. Третья нить не растягивается, её концы на осях блоков 4 и 5 поднимаются в сумме на $2\Delta h$, по Δh каждый. Вторая нить: четыре её участка (блок 4 — блок 2, блок 2 — блок 5, блок 5 — блок 3, блок 3 — груз) укоротились на Δh каждый, значит, участок между блоками 1 и 4 удлинился на $4\Delta h$; блок 4 сам поднялся на Δh, и ось блока 1 поднялась на $5\Delta h$. Первая нить огибает блок 1, и её конец сместился на $2 \cdot 5\Delta h = 10\Delta h$. Работа силы:

$$F \cdot 10\Delta h = (M_{\text{гр}} + 5m_1 + m_4 + m_5 + m_6)g\,\Delta h = (M_{\text{гр}} + m)g\,\Delta h,$$

то же, что из равновесия блоков. Предел: при $m \to 0$ $k = 10$ при любой массе груза, как у идеальной системы.

Физический смысл: система выигрывает в силе в 10 раз, но вынуждена поднимать ещё и свои блоки, причём верхний — в 5 раз быстрее груза; лёгкий груз она поднимает «себе в убыток».

Ответ. 1) $k_1 = 7$; 2) $k_{\max} = 10$ (предел при очень тяжёлом грузе); 3) при массе груза больше $M/6$.