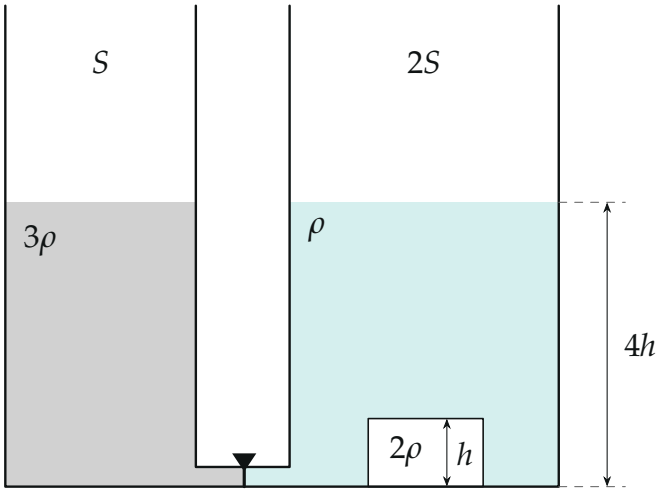
Меж двух жидкостей

Задача 3. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 8 класс, задача 3] «Меж двух жидкостей».

Два открытых вертикальных цилиндрических сосуда соединены тонкой трубкой с краном (см. рис.). В сосуде с площадью сечения S находится жидкость плотностью 3ρ, а в сосуде с площадью сечения $2S$ — жидкость плотностью ρ и шероховатый брусок, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Высота бруска h, площадь основания S, плотность 2ρ. Высота столбов жидкости в сосудах одинакова и равна $4h$. Оба сосуда сверху открыты, жидкости не смешиваются, не сжимаются и не выливаются из сосуда. Объёмом соединительной трубки можно пренебречь. Кран открывают.



Определите высоту столбов жидкостей в каждом сосуде после того, как перетекание прекратится.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на сообщающиеся сосуды с разными жидкостями: жидкость течёт туда, где давление у дна меньше, и останавливается, когда давления на уровне трубки сравняются. Слева давление у дна больше, поэтому тяжёлая жидкость 3ρ потечёт вправо и ляжет на дно под лёгкую. Брусок плотнее лёгкой жидкости, но легче тяжёлой: пока тяжёлого слоя мало, он лежит на дне (шероховатость не

даёт ему «присосаться» — жидкость подтекает под него), а когда слой станет достаточным — всплывёт и дальше будет плавать на границе жидкостей. Главная идея: в конечном состоянии весь груз правого сосуда — жидкости и плавающий брусок — давит на дно, и давление у дна справа равно полному весу содержимого, делённому на $2S$.

Обозначения. p_0 — атмосферное давление; $h_л$ — высота столба в левом сосуде, H — высота содержимого правого сосуда (верхний уровень жидкости ρ), x — толщина слоя жидкости 3ρ в правом сосуде. Масса бруска $m = 2\rho hS$.

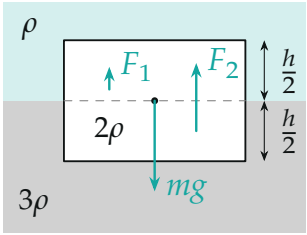
1. Куда течёт жидкость. По формуле гидростатического давления давления у дна до открытия крана:

$$p_л = p_0 + 3\rho g \cdot 4h = p_0 + 12\rho gh, \qquad p_п = p_0 + \rho g \cdot 4h = p_0 + 4\rho gh.$$

(Брусок лежит на дне справа и давление жидкости у дна вне бруска не меняет.) $p_л > p_п$, значит, жидкость 3ρ течёт слева направо и собирается на дне правого сосуда.

2. Когда всплывает брусок. Пока брусок лежит на дне, слой тяжёлой жидкости толщины $x < h$ закрывает его нижнюю часть. Запишем условие равновесия бруска без опоры (сила реакции дна обращается в ноль): сила тяжести равна сумме выталкивающих сил от двух жидкостей — каждая равна весу жидкости в объёме погружённой в неё части:

$$mg = \rho g\,(h - x)S + 3\rho g\,xS \quad \Rightarrow \quad 2\rho hS = \rho hS + 2\rho xS \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h}{2}.$$

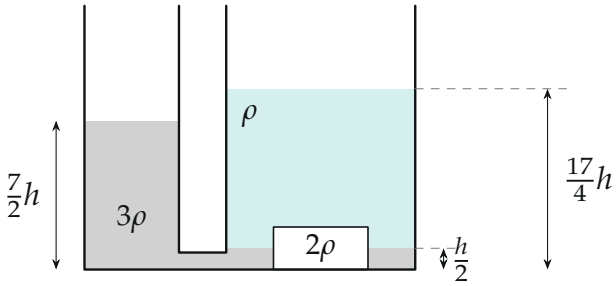


Брусок в момент отрыва от дна: $F_1 = \rho g\frac{h}{2}S$, $F_2 = 3\rho g\frac{h}{2}S$, $F_1 + F_2 = mg$

В этот момент вправо перешёл объём $(2S-S)\frac{h}{2} = \frac{hS}{2}$ (рядом с бруском свободна площадь S), уровень слева опустился до $\frac{7}{2}h$, а уровень справа поднялся на $\frac{h}{4}$, до $\frac{17}{4}h$. Давления у дна теперь

$$p_л = p_0+3\rho g\cdot\frac{7}{2}h = p_0+10{,}5\,\rho gh, \qquad p_п = p_0+3\rho g\cdot\frac{h}{2}+\rho g\cdot\frac{15}{4}h = p_0+5{,}25\,\rho gh,$$

слева всё ещё больше — перетекание продолжается, а брусок дальше плавает.



Момент отрыва бруска: слой тяжёлой жидкости справа $h/2$

3. Конец перетекания. Перетекание остановится, когда давления у дна (на уровне трубки) сравняются. Брусок плавает, поэтому дно правого сосуда держит всё его содержимое: жидкость 3ρ объёма $(4h - h_л)S$, жидкость ρ объёма $4h \cdot 2S - hS = 7hS$ и брусок. Сила давления на дно сверх атмосферной равна их весу:

$$p_п - p_0 = \frac{[3\rho(4h - h_л)S + 7\rho hS + 2\rho hS]g}{2S}.$$

Слева над дном только жидкость 3ρ: $p_л - p_0 = 3\rho g h_л$. Приравниваем:

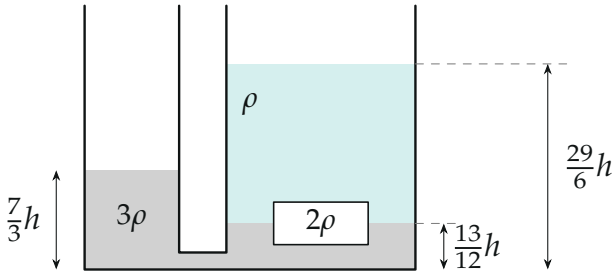
$$6h_л = 12h - 3h_л + 9h \quad \Rightarrow \quad h_л = \frac{21}{9}h = \frac{7}{3}h.$$

4. Высота содержимого справа. Брусок плотностью 2ρ плавает между жидкостями ρ и 3ρ, и, как проверим ниже, целиком погружён. Тогда

объём под уровнем H в правом сосуде — обе жидкости и весь брусок:

$$2SH = (4h - h_л)S + 7hS + hS = \left(\frac{5}{3} + 8\right)hS \quad \Rightarrow \quad H = \frac{29}{6}h.$$

Брусок погружён в тяжёлую жидкость на $\frac{h}{2}$ (как в п. 2: плавание бруска определяется только его плотностью и плотностями жидкостей), поэтому слой тяжёлой жидкости x: $2Sx - S\frac{h}{2} = \frac{5}{3}hS$, $x = \frac{13}{12}h$. Верх бруска на высоте $x + \frac{h}{2} = \frac{19}{12}h < H$ — брусок действительно целиком в жидкости.



Конечное состояние: давления у дна сравнялись, брусок плавает на границе жидкостей

Обратите внимание: высота «столба» в правом сосуде — это высота всего содержимого, жидкостей двух сортов; одна жидкость ρ занимает от $\frac{13}{12}h$ до $\frac{29}{6}h$.

Соберём ответ: $h_л = \frac{7}{3}h$, $H = \frac{29}{6}h$.

Проверка. Второй способ — гидростатика по слоям справа: $p_п - p_0 = 3\rho g \cdot \frac{13}{12}h + \rho g(\frac{29}{6} - \frac{13}{12})h = (\frac{39}{12} + \frac{45}{12})\rho g h = 7\rho g h$, слева $3\rho g \cdot \frac{7}{3}h = 7\rho g h$ — равны. Сохранение объёма тяжёлой жидкости: слева $\frac{7}{3}hS$, справа $\frac{5}{3}hS$, вместе $4hS$, как в начале. Ещё одна проверка — через перетекание порциями (так считают организаторы): после отрыва бруска вправо добавляется слой Δ, слева уходит 2Δ; из $3\rho g(\frac{7}{2}h - 2\Delta) = 5{,}25\rho g h + 3\rho g\Delta$ получаем $\Delta = \frac{7}{12}h$, $h_л = \frac{7}{2}h - \frac{7}{6}h = \frac{7}{3}h$, $H = \frac{17}{4}h + \Delta = \frac{29}{6}h$.

Физический смысл: плавающий брусок для дна всё равно что жидкость той же массы, поэтому равновесие определяет только полный вес содержимого правого сосуда.

Ответ. В левом сосуде $h_{\text{л}} = \dfrac{7}{3}h$; в правом сосуде высота содержимого $H = \dfrac{29}{6}h$.