Тепловые шарики

Задача 4. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 8 класс, задача 4] «Тепловые шарики».

В теплоизолированном сосуде находится $m_0 = 200$ г воды при температуре $t_0 = 20\,^\circ$C. В воду опускают шарик с теплоёмкостью $C_ш = 200$ Дж/°C с температурой $t_ш = 98\,^\circ$C. После установления теплового равновесия температура в сосуде оказывается равной $t_1 = 35\,^\circ$C. Когда в сосуд, не вынимая первый шарик, опустили второй точно такой же шарик с той же температурой $t_ш = 98\,^\circ$C, то температура в сосуде после установления теплового равновесия оказалась равной $t_2 = 47\,^\circ$C.

Не вынимая двух первых шариков, в сосуд помещают ещё один точно такой же (начальная температура $t_ш = 98\,^\circ$C, теплоёмкость $C_ш = 200$ Дж/°C). Определите t_3 — температуру теплового равновесия в этом случае. Считать, что время опускания шарика в воду намного меньше времени установления теплового равновесия.

Удельная теплоёмкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг·°C), удельная теплоёмкость материала шариков $c = 500$ Дж/(кг·°C), плотность шариков $\rho_ш = 7800$ кг/м^3, плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3. Теплоёмкостью сосуда можно пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на уравнение теплового баланса: в теплоизолированном сосуде теплота, отданная горячим шариком, равна теплоте, полученной водой и уже лежащими шариками. Подвох в данных: второй опыт даёт 47 °C, а простой баланс с прежней водой — меньше. Значит, воды стало меньше: сосуд был почти полон, и шарик, погружаясь, вытеснил часть воды через край. Шарик опускают быстро, поэтому вода выливается ещё холодной — с той температурой, что была до опускания. Главная идея: из второго опыта найти, сколько воды осталось, а для третьего учесть, что теперь сосуд полон до краёв и выльется весь объём шарика.

Обозначения. $m_ш$ и $V_ш$ — масса и объём шарика; m_2 — масса воды после второго опыта, m_3 — после третьего.

1. Шарик. Теплоёмкость тела равна произведению удельной теплоёмкости на массу: $C_ш = cm_ш$, откуда

$$m_ш = \frac{C_ш}{c} = \frac{200}{500}\text{ кг} = 0{,}4\text{ кг}, \qquad V_ш = \frac{m_ш}{\rho_ш} = \frac{0{,}4}{7800}\text{ м}^3 \approx 51{,}3\text{ см}^3.$$

Вода такого объёма имеет массу $\rho_0 V_ш \approx 51{,}3$ г.

2. Первый опыт — проверка. Уравнение теплового баланса (вода нагревается, шарик остывает, сумма теплот равна нулю):

$$c_в m_0 (t_1 - t_0) + C_ш (t_1 - t_ш) = 0,$$
$$t_1 = \frac{c_в m_0 t_0 + C_ш t_ш}{c_в m_0 + C_ш} = \frac{840 \cdot 20 + 200 \cdot 98}{1040}\,^\circ\text{C} = 35\,^\circ\text{C}.$$

Совпало с условием, значит, при первом шарике вода не выливалась.

3. Второй опыт: сколько воды осталось. Если бы вода не выливалась, баланс дал бы

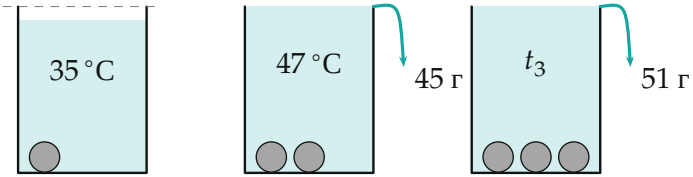
$$t_2' = \frac{(c_в m_0 + C_ш) t_1 + C_ш t_ш}{c_в m_0 + 2C_ш} =$$
$$= \frac{1040 \cdot 35 + 200 \cdot 98}{1240}\,^\circ\text{C} \approx 45{,}2\,^\circ\text{C} < 47\,^\circ\text{C}.$$

Температура выше — нагревать пришлось меньше воды: часть её (при 35 °C) вылилась. Уравнение теплового баланса с неизвестной массой оставшейся воды m_2: вода и шарик 1 греются от t_1 до t_2, шарик 2 остывает от $t_ш$ до t_2:

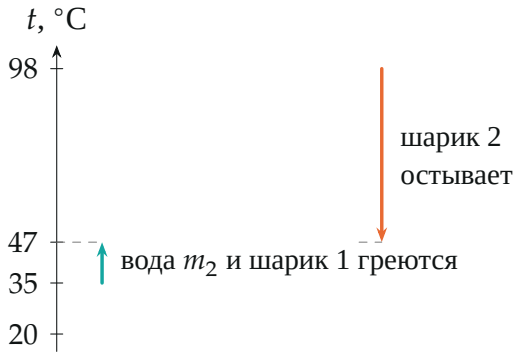
$$c_в m_2 (t_2 - t_1) + C_ш (t_2 - t_1) + C_ш (t_2 - t_ш) = 0,$$

$$m_2 = \frac{C_ш (t_ш - t_2) - C_ш (t_2 - t_1)}{c_в (t_2 - t_1)} = \frac{200 \cdot 51 - 200 \cdot 12}{4200 \cdot 12}\text{ кг} \approx 0{,}1548\text{ кг}.$$

Вылилось $m_0 - m_2 \approx 45{,}2$ г — меньше, чем 51,3 г: до второго шарика сосуд был неполон, а теперь вода стоит вровень с краем.



Сосуд после каждого шарика (зазор у края в первом сосуде увеличен для наглядности). Второй шарик выливает 45 г воды при 35 °C, третий — полный свой объём, 51 г при 47 °C



Тепловой баланс второго опыта: бирюзовая стрелка — нагрев воды и первого шарика, морковная — остывание второго шарика

4. Третий опыт. Сосуд полон до края, поэтому третий шарик вытесняет воду объёмом $V_ш$, массой 51,3 г, при температуре t_2. Остаётся

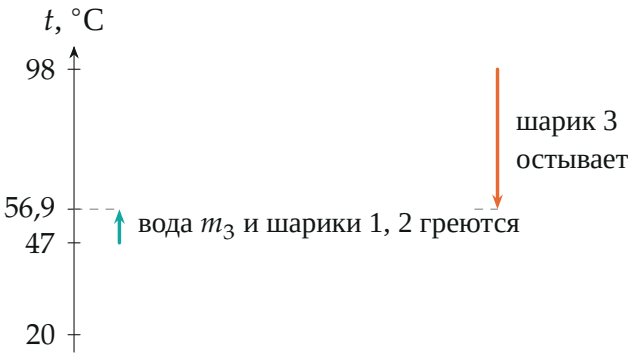
$$m_3 = m_2 - \rho_0 V_ш \approx 154{,}8\ г - 51{,}3\ г \approx 103{,}5\ г.$$

Уравнение теплового баланса: вода m_3 и два шарика греются от t_2 до t_3, третий шарик остывает от $t_ш$ до t_3:

$$(c_в m_3 + 2C_ш)(t_3 - t_2) + C_ш(t_3 - t_ш) = 0,$$
$$t_3 = \frac{(c_в m_3 + 2C_ш)t_2 + C_ш t_ш}{c_в m_3 + 3C_ш}.$$

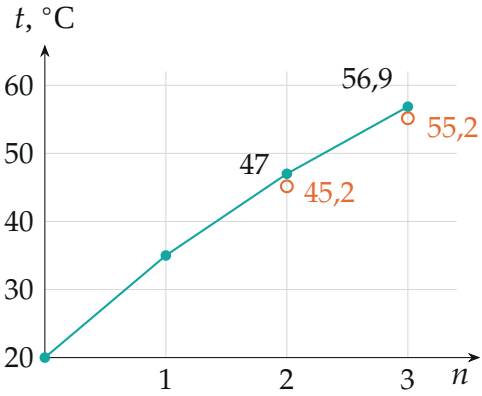
Числа: $c_в m_3 \approx 434{,}6$ Дж/°C,

$$t_3 = \frac{834{,}6 \cdot 47 + 200 \cdot 98}{1034{,}6}\ °C \approx 56{,}9\ °C \approx 57\ °C.$$



Тепловой баланс третьего опыта: нагрев от 47 °C до t_3 и остывание третьего шарика от 98 °C

Обратите внимание: вода выливается сразу при опускании шарика, ещё до теплообмена, поэтому в балансе её просто нет — она уходит с той температурой, которая была в сосуде до опускания (35 °C во втором опыте, 47 °C в третьем).



Равновесная температура после n шариков. Бирюзовые точки — с учётом вылившейся воды, морковные кружки — если бы вода не выливалась

Проверка. Размерность: в t_3 отношение теплоёмкостей (Дж/°C) к теплоёмкостям, умноженное на температуру, — градусы. Предел: если бы третий шарик не вылил воду, получилось бы $\frac{(650+400)\cdot 47+200\cdot 98}{1250} \approx 55{,}2$ °C; с меньшей массой воды температура выше, как и во втором

опыте. Ещё одна проверка — общий баланс от начального состояния: шарики отдали $200 \cdot (98 - 56{,}9) \cdot 3 \approx 24{,}7$ кДж; вода получила

$$4200 \cdot (0{,}0452 \cdot 15 + 0{,}0513 \cdot 27 + 0{,}1035 \cdot 36{,}9)\ \text{Дж} \approx 24{,}7\ \text{кДж}$$

(каждая порция нагрелась до температуры, с которой ушла) — сходится.

Физический смысл: вода — главный «теплоприёмник» в сосуде, и даже небольшая потеря её массы заметно поднимает итоговую температуру.

Ответ. $t_3 \approx 57\,^\circ\text{C}$ (вылилось 45 г воды во втором опыте и 51 г — в третьем).