Тупая игла

Задача 1. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 9 класс, задача 1 (практический тур)] «Тупая игла».

При медленном движении поршня шприца масса m капли жидкости на конце иглы постепенно нарастает. Если шприц расположен вертикально, иглой вниз, то отрыв капли происходит при некотором значении m, которое можно определить по формуле

$$m = \pi g^{\alpha} d^{\beta} \sigma_{\text{эф}}^{\gamma},$$

где α, β, γ — некоторые целые числа, π — безразмерный коэффициент, равный 3,14, g — ускорение свободного падения, равное 9,8 м/с^2, d — внешний диаметр иглы, $\sigma_{\text{эф}}$ — эффективный коэффициент поверхностного натяжения, зависящий от природы соприкасающихся сред. Единицы измерения коэффициента поверхностного натяжения — Н/м.

1. Укажите в работе внешние диаметры выданных Вам игл.
2. Определите показатели степеней α, β и γ.
3. Экспериментально исследуйте зависимость массы капли m от внешнего диаметра иглы d. Опишите метод определения массы капли m.
4. Постройте график полученной зависимости.
5. С помощью графика определите значение $\sigma_{\text{эф}}$.

Оборудование: набор из 7 игл с известными внешними диаметрами d (см. таблицу); шприц объёмом 1 мл; стакан с водой плотностью $\rho_0 = 1{,}0$ г/см^3; салфетки для поддержания чистоты; лист миллиметровой бумаги для построения графика.

Внимание! Оценка погрешностей в этой работе не требуется.

Таблица соответствия калибра иглы и её внешнего диаметра:

Калибр	16G	18G	19G	20G	22G	23G	27G
d, мм	1,60	1,20	1,08	0,90	0,83	0,63	0,40

▲ **Решение.** **Что происходит.** Капля висит на торце иглы, пока её вес удерживают силы поверхностного натяжения, действующие вдоль

окружности соприкосновения с иглой. Длина этой окружности πd, поэтому наибольшая удерживаемая сила пропорциональна $\pi d\sigma$, и масса капли в момент отрыва пропорциональна диаметру иглы. Это видно и из размерностей (п. 2). Массу одной капли взвешивать нечем — весов нет, поэтому считаем капли: из известного объёма V (шкала шприца) выпускаем N капель и делим. Затем строим график $m(d)$ — прямую через начало координат — и по наклону находим $\sigma_{\text{эф}}$.

Обозначения. V — объём воды, вытекшей из шприца, N — число капель, ρ_0 — плотность воды, k — наклон графика $m(d)$.

Пункт 1. Диаметры игл берутся по таблице калибров. У организаторов в наборе были иглы $d = 0{,}40$; 0,70; 0,80; 0,90; 1,03; 1,25; 1,60 мм (часть калибров отличается от таблицы условия, измерения ниже — с этими иглами).

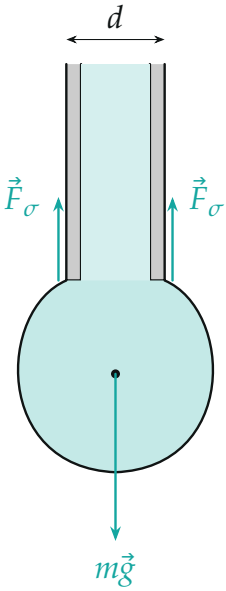
Пункт 2. Приравняем размерности левой и правой частей формулы. $[m] = \text{кг}$, $[g] = \text{м/с}^2$, $[d] = \text{м}$, $[\sigma] = \text{Н/м} = \text{кг/с}^2$:

$$\text{кг} = \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)^{\alpha} \text{м}^{\beta} \left(\frac{\text{кг}}{\text{с}^2}\right)^{\gamma} = \text{м}^{\alpha+\beta}\,\text{кг}^{\gamma}\,\text{с}^{-2\alpha-2\gamma}.$$

Показатели при каждой единице слева и справа равны: килограмм — $\gamma = 1$; секунда — $-2\alpha - 2\gamma = 0$, $\alpha = -1$; метр — $\alpha + \beta = 0$, $\beta = 1$. Получаем

$$m = \frac{\pi d\,\sigma_{\text{эф}}}{g}.$$

Тот же результат даёт условие отрыва капли: вес mg равен наибольшей силе поверхностного натяжения $F_\sigma = \sigma_{\text{эф}} \cdot \pi d$ — она действует вдоль окружности длиной πd, по которой капля держится за торец иглы.

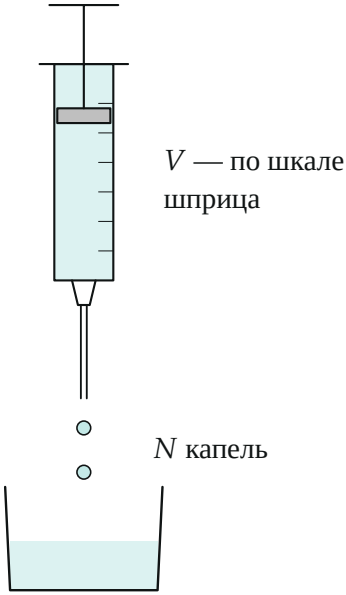


Капля в момент отрыва: вес уравновешен силой поверхностного натяжения по окружности торца иглы диаметром d

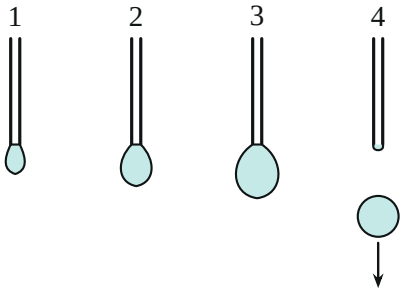
Пункт 3. Метод. Набираем в шприц воду, держим его вертикально иглой вниз над стаканом и очень медленно давим на поршень, чтобы капли нарастали медленно и отрывались под собственным весом, а не выдавливались. Отмечаем по шкале начальный и конечный объём (их разность — V, порядка 0,8 мл) и считаем число капель N. Тогда по определению плотности

$$m = \frac{\rho_0 V}{N}.$$

Считать десятки капель и делить — точнее, чем мерить одну каплю: ошибка в одну каплю даёт 2–3%.



Счёт капель из известного объёма

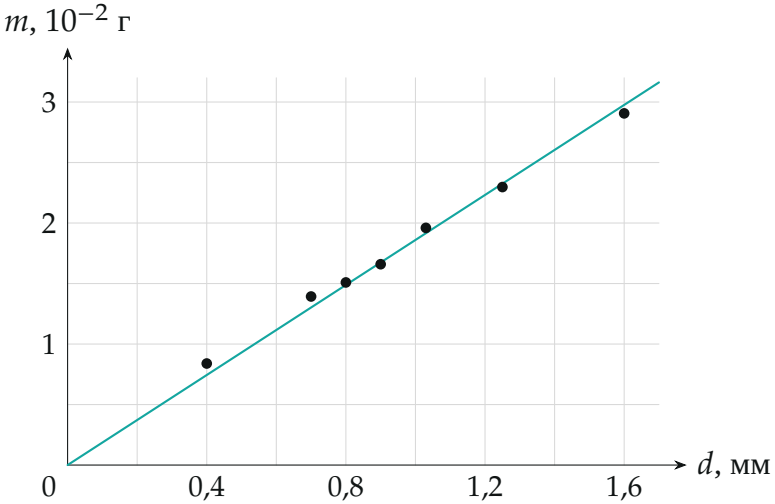


Капля медленно растёт (1–3), пока её вес не превысит удерживающую силу, и отрывается (4)

Результаты организаторов:

d, мм	1,60	1,25	1,03	0,90	0,80	0,70	0,40
V, мл	0,93	0,85	0,98	0,78	0,83	0,78	0,73
N	32	37	50	47	55	56	87
m, 10^{-2} г	2,91	2,30	1,96	1,66	1,51	1,39	0,84

Пункт 4. Строим точки $(d,\ m)$. По п. 2 зависимость — прямая через начало координат, $m = kd$, $k = \dfrac{\pi\sigma_{эф}}{g}$. Точки действительно ложатся на такую прямую.



Зависимость массы капли от внешнего диаметра иглы; прямая — $m = kd$, $k = 0{,}0186$ г/мм

Пункт 5. Наклон прямой через начало координат по методу наименьших квадратов:

$$k = \frac{\sum d_i m_i}{\sum d_i^2} \approx 0{,}0186\ \frac{\text{г}}{\text{мм}} = 0{,}0186\ \frac{\text{кг}}{\text{м}}$$

(разброс точек даёт около 1%). Отсюда

$$\sigma_{эф} = \frac{kg}{\pi} = \frac{0{,}0186 \cdot 9{,}8}{3{,}14}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}} \approx 0{,}058\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

У организаторов наклон снят с графика на глаз, $k \approx 0{,}019$ г/мм, и $\sigma_{эф} \approx 0{,}059$ Н/м — в пределах точности опыта то же.

Обратите внимание: масса капли зависит от *внешнего* диаметра иглы: вода смачивает металл и растекается по всему торцу, до наружного края.

Проверка. Размерность: $\frac{[k][g]}{1} = \frac{\text{кг}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}}$. По одной точке: $d = 1{,}60$ мм, $m = 0{,}0291$ г: $\sigma = \frac{mg}{\pi d} = \frac{2{,}91\cdot10^{-5}\cdot9{,}8}{3{,}14\cdot1{,}6\cdot10^{-3}} \approx 0{,}057$ Н/м — согласуется. Табличный коэффициент поверхностного натяжения воды 0,073 Н/м больше: при отрыве на игле остаётся часть капли, и оторвавшаяся капля легче, чем $\pi d\sigma/g$, — поэтому коэффициент и назван эффективным.

Физический смысл: игла — «весы» для поверхностного натяжения, масса капли растёт пропорционально длине окружности, за которую капля держится.

Ответ. 1) $d = 0{,}40$; 0,70; 0,80; 0,90; 1,03; 1,25; 1,60 мм (набор организаторов); 2) $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $m = \pi d\sigma_{\text{эф}}/g$; 3) $m = \rho_0 V/N$ по числу капель из объёма V; 4) прямая через начало координат, $k \approx 0{,}0186$ г/мм; 5) $\sigma_{\text{эф}} \approx 0{,}058$ Н/м.