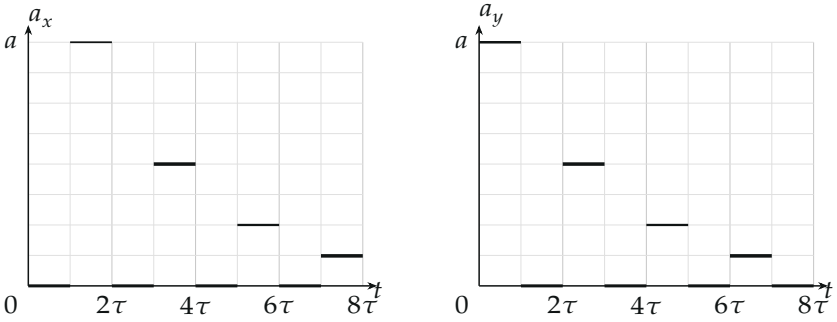
Импульсное ускорение

Задача 1. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 9 класс, задача 1] «Импульсное ускорение».

Частица двигалась в плоскости Oxy в положительном направлении оси x с постоянной скоростью, параллельной оси x. В момент времени $t = 0$ на неё начала действовать переменная сила, которая лежит в плоскости Oxy. Действие этой силы привело к возникновению ускорения, которое периодически изменяло своё направление. Модуль ускорения при $t = 0$ был равен a и через каждый промежуток времени 2τ уменьшался в 2 раза. На рисунке представлены графики зависимости проекций ускорения частицы от времени за некоторый начальный интервал времени.



Считая известными a и τ, определите максимальную и минимальную (по модулю) скорости частицы, которая двигалась под действием этой силы в течение долгого времени. При этом скорость частицы отклонялась от первоначального направления движения на максимальный угол α.

Примечание: сумма бесконечной геометрической прогрессии $b + bq + bq^2 + bq^3 + \ldots = \sum\limits_{i=0}^{\infty} bq^i = \dfrac{b}{1-q}$, где $|q| < 1$.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сложение приращений скорости: при постоянном ускорении за время τ скорость меняется на $\vec{a}\,\tau$. По графикам ускорение направлено поочерёдно вдоль y и вдоль x, и каждые 2τ вдвое слабее. Значит, конец вектора скорости идёт «лесенкой»:

вверх на $a\tau$, вправо на $a\tau$, вверх на $a\tau/2$, вправо на $a\tau/2$, … Обе проекции скорости только растут, поэтому модуль скорости растёт: минимальна начальная скорость v_0, максимальна предельная v_∞. Неизвестную v_0 находим из условия про максимальный угол α — и тут два случая.

Обозначения. v_0 — начальная скорость (вдоль x); $\vec{v}_k$ — скорость после k-й «ступеньки»; θ — угол скорости с осью x; v_∞ — скорость через очень долгое время.

1. Приращения скорости. По определению ускорения $\Delta\vec{v} = \vec{a}\,\Delta t$ на участке, где $\vec{a}$ постоянно. По графикам:

t	$0 \dots \tau$	$\tau \dots 2\tau$	$2\tau \dots 3\tau$	$3\tau \dots 4\tau$	…
Δv_x	0	$a\tau$	0	$a\tau/2$	…
Δv_y	$a\tau$	0	$a\tau/2$	0	…

Все приращения положительны, поэтому $|\vec{v}|$ только растёт (рис. 1).

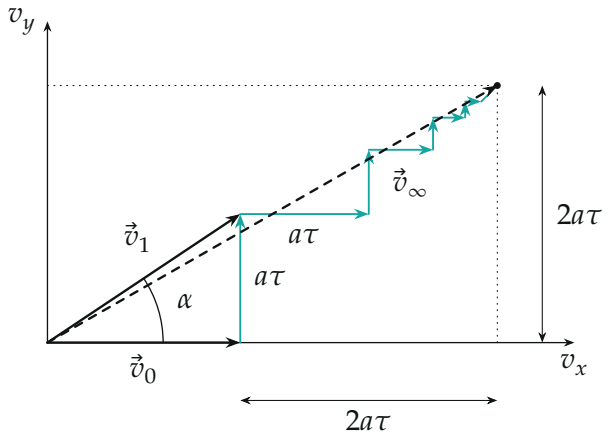


Рис. 1. Векторная диаграмма скоростей при $v_0 = 1{,}5\,a\tau$: бирюзовая «лесенка» — приращения $a\tau$, $a\tau$, $a\tau/2$, $a\tau/2$, …, пунктир — предельная скорость. Здесь наибольший угол — у $\vec{v}_1$.

2. Предельная скорость. Перегруппируем приращения: все горизонтальные вместе, все вертикальные вместе (рис. 2). По формуле суммы

геометрической прогрессии с $q = 1/2$

$$\Delta v_x = \Delta v_y = a\tau\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{a\tau}{1 - 1/2} = 2a\tau.$$

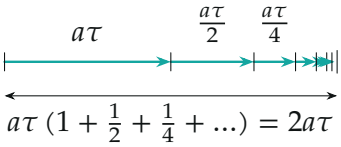


Рис. 2. Горизонтальные (и так же вертикальные) приращения, выложенные подряд, заполняют отрезок $2a\tau$.

Значит, через долгое время $v_{\infty x} = v_0 + 2a\tau$, $v_{\infty y} = 2a\tau$, и

$$v_{\max} = v_\infty = \sqrt{(v_0 + 2a\tau)^2 + (2a\tau)^2}, \qquad v_{\min} = v_0.$$

3. Где угол наибольший. Угол растёт на вертикальных ступеньках и падает на горизонтальных, поэтому наибольшие значения — сразу после вертикальных. После $(k+1)$-й вертикальной ступеньки (сумма прогрессий, $s = 2^{-k}$)

$$v_y = a\tau(2 - s), \quad v_x = v_0 + a\tau(2 - 2s),$$

$$\operatorname{tg}\theta_k = \frac{2 - s}{u + 2 - 2s}, \qquad u = \frac{v_0}{a\tau}.$$

Как это зависит от s: в числителе дроби $\dfrac{2 - s}{u + 2 - 2s}$ при уменьшении s на δ прибавляется δ, в знаменателе — 2δ. Если $u < 2$, то $\operatorname{tg}\theta_0 = 1/u > 1/2$, а добавка $\delta/(2\delta) = 1/2$ меньше дроби — дробь уменьшается; если $u > 2$, то $1/u < 1/2$ и дробь растёт (рис. 3). Поэтому:

- $v_0 \le 2a\tau$: наибольший угол — после первой ступеньки, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\theta_0 = \dfrac{a\tau}{v_0}$;
- $v_0 \ge 2a\tau$: угол растёт всё время, наибольший — предельный, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2a\tau}{v_0 + 2a\tau}$.

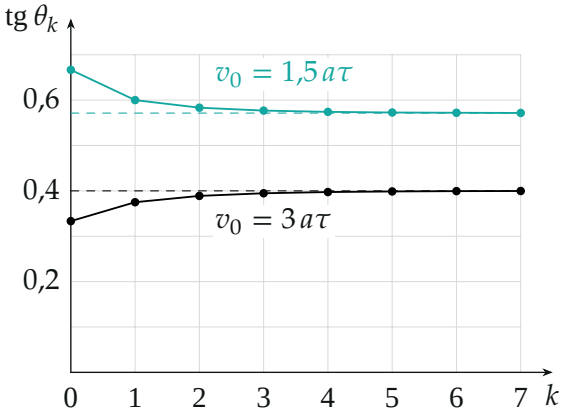


Рис. 3. $\operatorname{tg}\theta_k$ *после* k*-й вертикальной ступеньки (по формуле п. 3). При* $v_0 < 2a\tau$ *угол убывает от первого значения, при* $v_0 > 2a\tau$ *растёт к пределу (пунктиры —* $\operatorname{tg}\theta_\infty$*).*

4. Случай 1: $v_0 \le 2a\tau$**.** Из $\operatorname{tg}\alpha = a\tau/v_0$:

$$v_{\min} = v_0 = a\tau\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$v_{\max} = \sqrt{(a\tau\operatorname{ctg}\alpha + 2a\tau)^2 + (2a\tau)^2} = a\tau\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 4\operatorname{ctg}\alpha + 8}.$$

Условие $v_0 \le 2a\tau$ означает $\operatorname{ctg}\alpha \le 2$.

5. Случай 2: $v_0 \ge 2a\tau$**.** Из $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2a\tau}{v_0 + 2a\tau}$: $v_0 + 2a\tau = 2a\tau\operatorname{ctg}\alpha$,

$$v_{\min} = v_0 = 2a\tau(\operatorname{ctg}\alpha - 1), \qquad v_{\max} = \sqrt{(2a\tau\operatorname{ctg}\alpha)^2 + (2a\tau)^2} = \frac{2a\tau}{\sin\alpha}.$$

Условие $v_0 \ge 2a\tau$ означает $\operatorname{ctg}\alpha \ge 2$. Геометрически $v_{\max}$ — гипотенуза треугольника с катетом $2a\tau$ против угла α (рис. 4).

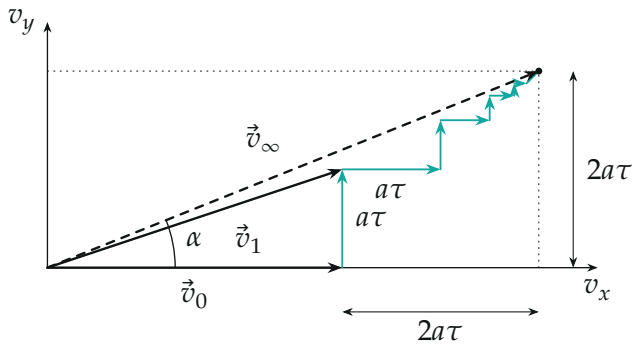


Рис. 4. Случай 2 ($v_0 = 3a\tau$): угол растёт с каждой ступенькой, наибольший — у предельной скорости.

Обратите внимание. Случай выбирается по самому α: при $\operatorname{tg}\alpha \geq 1/2$ — первый, при $\operatorname{tg}\alpha \leq 1/2$ — второй. На границе $\operatorname{ctg}\alpha = 2$ ответы совпадают: $v_{\min} = 2a\tau$, $v_{\max} = 2\sqrt{5}\,a\tau$.

Проверка. Размерность: $a\tau$ — скорость. Граница: при $\operatorname{ctg}\alpha = 2$ первый случай даёт $v_{\max} = a\tau\sqrt{4+8+8} = 2\sqrt{5}\,a\tau$, второй — $2a\tau/\sin\alpha = 2a\tau\sqrt{1+4} = 2\sqrt{5}\,a\tau$: ответы сшиваются. Предел $\alpha \to 0$ (второй случай): $v_0 \to \infty$, сила почти не поворачивает скорость. Смысл: сколько бы ни длилось действие, ускорение затухает так быстро, что суммарная добавка к каждой проекции конечна — $2a\tau$.

Ответ. Если $\operatorname{ctg}\alpha \leq 2$ (то есть $v_0 \leq 2a\tau$): $v_{\min} = a\tau\operatorname{ctg}\alpha$, $v_{\max} = a\tau\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 4\operatorname{ctg}\alpha + 8}$; если $\operatorname{ctg}\alpha \geq 2$ ($v_0 \geq 2a\tau$): $v_{\min} = 2a\tau(\operatorname{ctg}\alpha - 1)$, $v_{\max} = \dfrac{2a\tau}{\sin\alpha}$.