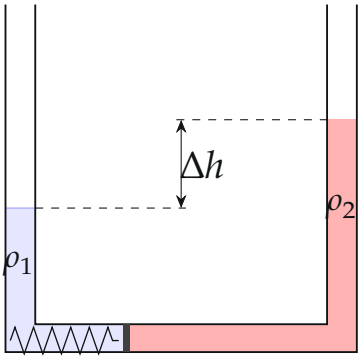
Другой уровень

Задача 2. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 9 класс, задача 2] «Другой уровень».

Тонкая трубка площадью поперечного сечения S изогнута в виде перевёрнутой буквы П (см. рисунок). В горизонтальной части трубки находится невесомый поршень, который связан с левой стенкой пружиной. В вертикальных концах трубки в равновесии находятся две жидкости: в левой — жидкость плотностью ρ_1, а в правой — жидкость плотностью $\rho_2 < \rho_1$. При этом разность уровней верхних границ жидкостей в вертикальных коленах составляет Δh, а пружина недеформирована. Коэффициент жёсткости k пружины подобран таким образом, чтобы при добавлении в левое колено жидкости плотностью ρ_1 разность уровней Δh всё время оставалась постоянной.



1. Чему равен коэффициент жёсткости k?

В левую часть трубки добавляют объём ΔV жидкости плотностью ρ_2, при этом верхние границы жидкостей в вертикальных частях оказываются на одном уровне.

2. Определите, какой объём ΔV жидкости добавили в левое колено?

Поршень скользит без трения. Жидкость между поршнем и стенками сосуда не подтекает и не выливается из сосуда. Объёмом пружины можно пренебречь, жидкости не смешиваются и не перетекают в другое вертикальное колено. Ускорение свободного падения равно g.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие поршня в сообщающихся сосудах. Поршень невесомый, поэтому силы на него в сумме равны нулю: давление жидкости слева, давление справа и сила пружины. Давления — гидростатические, от высоты столбов над поршнем; атмосферное давление действует на оба открытых конца одинаково и сокращается. Связь уровней даёт несжимаемость: сдвиг поршня на x поднимает правый уровень ровно на x.

Обозначения. h_1, h_2 — высоты верхних границ жидкостей над осью поршня в начальном состоянии ($h_2 = h_1 + \Delta h$); x — смещение поршня вправо (на столько же растягивается пружина); p_1, p_2 — избыточные над атмосферным давления жидкостей у поршня.

1. Начальное равновесие. Второй закон Ньютона для невесомого поршня в проекции на горизонталь: $p_1 S = p_2 S$, пружина не деформирована (рис. 1). Давление у поршня по закону гидростатики $p = \rho g h$:

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 = \rho_2 g (h_1 + \Delta h) \;\Rightarrow\; h_1 = \frac{\rho_2 \Delta h}{\rho_1 - \rho_2}, \qquad h_2 = \frac{\rho_1 \Delta h}{\rho_1 - \rho_2}.$$

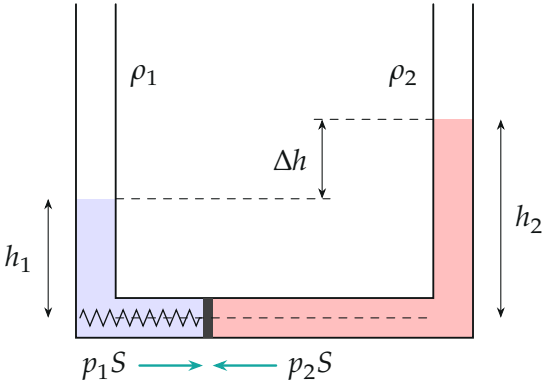


Рис. 1. Начальное состояние: давления слева и справа уравновешены, пружина не деформирована. Высоты отсчитаны от оси поршня (пунктир).

Пункт 1. Жёсткость пружины.

2. Как сдвигаются уровни. Доливаем жидкость ρ_1 слева, поршень сдвигается вправо на x и вытесняет объём Sx правой жидкости — пра-

вый уровень поднимается на x. Чтобы Δh не менялась, левый уровень тоже должен подняться на x (рис. 2).

3. Равновесие поршня после доливания. Слева столб $h_1 + x$, справа $h_2 + x$, пружина растянута на x и тянет поршень влево с силой kx:

$$\rho_1 g(h_1 + x)S = \rho_2 g(h_2 + x)S + kx.$$

Вычитаем начальное равенство $\rho_1 g h_1 S = \rho_2 g h_2 S$:

$$\rho_1 g x S = \rho_2 g x S + kx \;\Rightarrow\; k = (\rho_1 - \rho_2)gS.$$

x сократился — при такой жёсткости Δh сохраняется при *любом* количестве долитой жидкости.

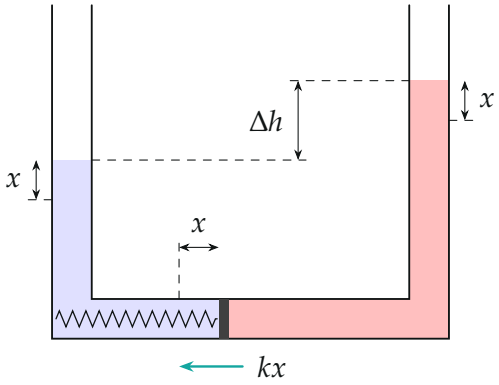


Рис. 2. После доливания жидкости ρ_1: поршень сдвинулся на x, оба уровня поднялись на x, разность уровней прежняя; пружина растянута и тянет поршень влево.

Пункт 2. Объём жидкости ρ_2.

4. Геометрия. Теперь доливаем жидкость ρ_2 слева в исходное состояние; она ложится сверху слоем высоты z, $\Delta V = Sz$. Поршень сдвигается вправо на x: столб ρ_1 слева опускается на x (его объём не изменился, но часть ушла в горизонтальное колено), правый уровень поднимается на x (рис. 3). Верхние границы на одном уровне:

$$(h_1 - x) + z = h_2 + x \;\Rightarrow\; z = \Delta h + 2x.$$

5. Равновесие поршня (давление слева — от двух слоёв):

$$\rho_1 g(h_1 - x)S + \rho_2 g z S = \rho_2 g(h_2 + x)S + kx.$$

Вычитаем начальное равенство, подставляем $k = (\rho_1 - \rho_2)gS$ и $z = \Delta h + 2x$, делим на gS:

$$-\rho_1 x + \rho_2(\Delta h + 2x) = \rho_2 x + (\rho_1 - \rho_2)x \;\Rightarrow\; x = \frac{\rho_2 \Delta h}{2(\rho_1 - \rho_2)}.$$

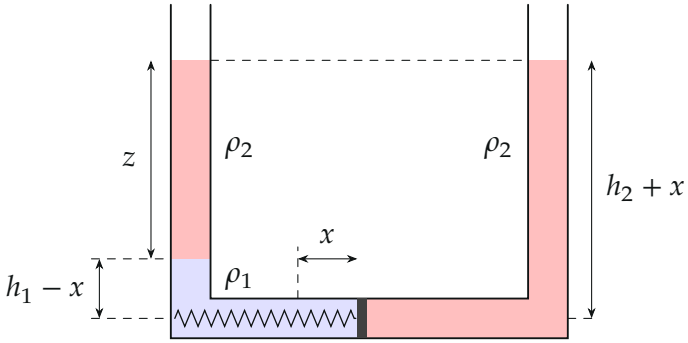


Рис. 3. После доливания жидкости ρ_2: слева столб ρ_1 высотой $h_1 - x$ и слой ρ_2 высотой z, справа уровень $h_2 + x$; верхние границы совпадают. Построено при $\rho_2/\rho_1 = 0{,}6$.

6. Применимость. Поршень сдвинулся меньше, чем было жидкости ρ_1 в левом колене: $x = h_1/2 < h_1$. Значит, жидкость ρ_2 не дошла до горизонтальной части, и картина рис. 3 верна.

7. Объём.

$$\Delta V = Sz = S\Big(\Delta h + \frac{\rho_2 \Delta h}{\rho_1 - \rho_2}\Big) = \frac{\rho_1 \Delta h S}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Обратите внимание. Долитая жидкость ρ_2 легче той, что внизу, поэтому толкает поршень слабее, чем такой же столб ρ_1: уровни выравниваются, а не сохраняют разность. Высоту в законе гидростатики считаем над осью поршня отдельно для каждого слоя.

Проверка. Размерность: $k = (\rho_1 - \rho_2)gS$ — кг/м^3·м/с^2·м^2 = Н/м; ΔV — м·м^2. Предел $\rho_2 \to 0$: $\Delta V \to S\Delta h$ — невесомая жидкость поршень не двигает, её просто доливают до уровня правого колена. Численно при $\rho_2/\rho_1 = 0{,}6$: $x = 0{,}75\Delta h$, $z = 2{,}5\Delta h$, слева $h_1 - x + z = 1{,}5\Delta h - 0{,}75\Delta h + 2{,}5\Delta h = 3{,}25\Delta h$, справа $h_2 + x = 2{,}5\Delta h + 0{,}75\Delta h = 3{,}25\Delta h$ — совпало.

Ответ. 1) $k = (\rho_1 - \rho_2)gS$; 2) $\Delta V = \dfrac{\rho_1 \Delta h S}{\rho_1 - \rho_2}$.