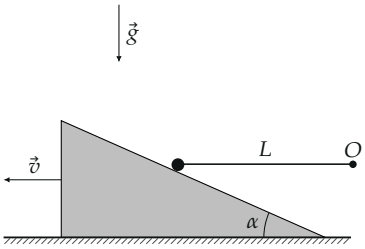
Не падать

Задача 3. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 9 класс, задача 3] «Не падать».

Один конец невесомого жесткого стержня длиной L с закреплённым на конце маленьким шариком массой m касается массивного клина с углом α при основании (см. рисунок). Другой конец стержня шарнирно закреплён в точке O. Систему удерживают в некотором положении, а затем отпускают. В момент, когда стержень горизонтален, шарик отрывается от клина.



Определите скорость v клина в этот момент.

Ускорение свободного падения g считайте известным. Трения в системе нет.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на кинематические связи: шарик идёт по окружности радиуса L вокруг O и, пока касается клина, толкает его влево. Две связи решают всё. Первая — для скоростей: пока шарик не оторвался, проекции скоростей шарика и клина на нормаль к грани равны. Вторая — для ускорений в момент отрыва: сила реакции обращается в нуль, на клин действуют только вертикальные силы, его ускорение равно нулю, значит, и ускорение шарика на нормаль к грани равно нулю. Отсюда скорость шарика, а по первой связи — скорость клина.

Обозначения. $\vec{u}$ — скорость шарика, $\vec{v}$ — скорость клина (горизонтально, влево); $\vec{n}$ — нормаль к грани клина; a_τ, a_n — касательная и центростремительная составляющие ускорения шарика; $\vec{T}$ — сила со стороны стержня.

1. Связь скоростей. Стержень горизонтален, шарик движется по окружности, поэтому его скорость $\vec{u}$ перпендикулярна стержню — направлена вертикально вниз. Нормаль к грани наклонена к вертикали на угол α (рис. 1). Шарик не отрывается и не вдавливается в клин, поэтому проекции скоростей на нормаль равны:

$$u\cos\alpha = v\sin\alpha \;\Rightarrow\; u = v\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

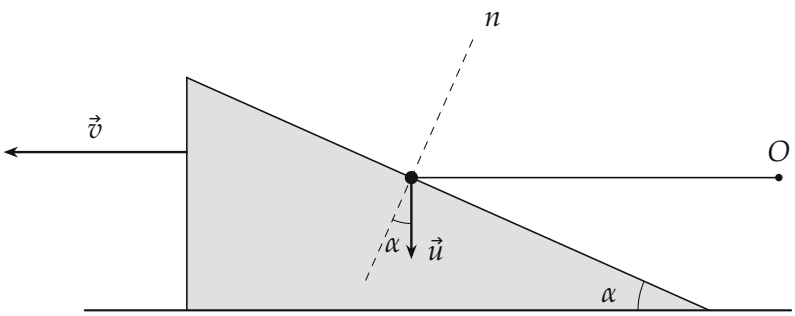


Рис. 1. Скорости в момент, когда стержень горизонтален: шарик — вниз, клин — влево; n — нормаль к грани. Длины стрелок — при $\alpha = 24°$.

Тот же результат в системе отсчёта клина (второй способ): скорость шарика относительно клина $\vec{u}_{\text{отн}} = \vec{u} - \vec{v}$ направлена вдоль грани (рис. 2). Треугольник скоростей прямоугольный, катеты u и v, угол α против u: $\mathrm{tg}\,\alpha = u/v$.

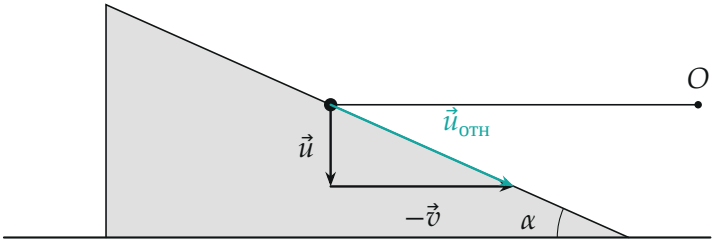


Рис. 2. В системе клина: $\vec{u}_{отн} = \vec{u} + (-\vec{v})$ идёт вдоль грани.

2. Ускорение клина в момент отрыва. В момент отрыва сила реакции между шариком и клином равна нулю. На клин остаются сила

тяжести и реакция пола — обе вертикальные, а по горизонтали клин движется свободно (трения нет). Второй закон Ньютона для клина по горизонтали: $Ma_к = 0$.

3. Ускорение шарика направлено вдоль грани. Связь скоростей по нормали выполняется всё время до отрыва, нормаль неподвижна по направлению, поэтому и проекции ускорений на неё равны: проекция ускорения шарика на нормаль равна $a_к \sin\alpha = 0$. Значит, ускорение шарика в этот момент лежит вдоль грани.

4. Второй закон Ньютона для шарика в момент отрыва: на него действуют $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ (реакции клина уже нет); стержень невесом, поэтому сила от него направлена вдоль стержня — горизонтально. Шарик движется по окружности: вдоль стержня (к O) — центростремительное ускорение u^2/L, поперёк (вертикально) — касательное:

$$T = m\frac{u^2}{L}, \qquad mg = ma_\tau \;\Rightarrow\; a_\tau = g.$$

Сумма $\vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ должна идти вдоль грани (рис. 3): $\dfrac{a_\tau}{a_n} = \operatorname{tg}\alpha$, то есть

$$g = \frac{u^2}{L}\operatorname{tg}\alpha \;\Rightarrow\; u^2 = gL\operatorname{ctg}\alpha.$$

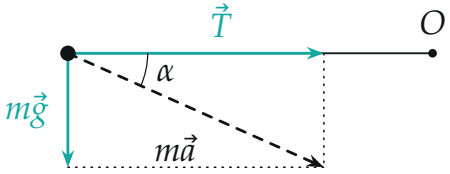


Рис. 3. Силы на шарик в момент отрыва (реакции клина нет): сила тяжести, сила стержня и их сумма $m\vec{a}$ — вдоль грани клина, под углом α к горизонтали. Длины — при $\alpha = 24°$.

5. Скорость клина. Из $u = v\operatorname{tg}\alpha$:

$$v = \frac{u}{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\frac{gL\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}} = \sqrt{gL\operatorname{ctg}^3\alpha}.$$

Обратите внимание. «Ускорение клина равно нулю» верно только в самый момент отрыва: до него шарик давит на клин и разгоняет его. Именно поэтому в этот момент ускорение шарика — по грани, хотя сам шарик движется по окружности.

Проверка. Размерность: $\sqrt{gL}$ — м/с. Предел $\alpha \to 90^\circ$ (грань вертикальна): $v \to 0$ — вертикальная стенка не толкается, падающий вниз шарик её не двигает. Предел малых α: v велико — пологая грань «отскакивает» далеко при малом опускании шарика. Второй способ шага 4 — проекция второго закона Ньютона на нормаль к грани (ускорение по ней ноль): $T\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0$, $\dfrac{mu^2}{L}\sin\alpha = mg\cos\alpha$ — то же $u^2 = gL\operatorname{ctg}\alpha$.

Ответ. $v = \sqrt{gL\operatorname{ctg}^3\alpha} = \sqrt{\dfrac{gL}{\operatorname{tg}^3\alpha}}$.