Тепловой цикл

Задача 4. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 9 класс, задача 4] «Тепловой цикл».

Экспериментатор Глюк поставил на газовую плиту кастрюлю с водой. Вода имеет неизвестные начальные массу M и температуру t_1. Ненадолго отвлёкшись, он обнаружил, что большая часть воды уже выкипела. Глюк осознал, что процесс нагревания нужного количества воды придётся начинать сначала. Он выключил плиту, и с небольшим постоянным массовым расходом μ стал доливать в кастрюлю холодную воду температурой $t_\text{х} = 20\,^\circ\text{C}$. Когда масса воды в кастрюльке стала равна начальной, температура воды также оказалась равна начальной температуре.

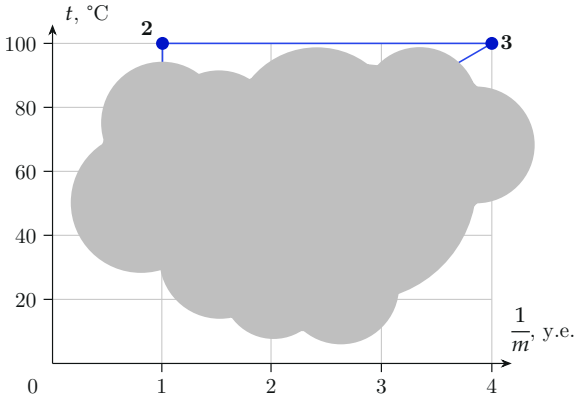

Диаграмма зависимости температуры воды в кастрюле в течение эксперимента от величины, обратной к общей массе воды в кастрюле (см. рисунок), оказалось, представляет собой замкнутый цикл $1-2-3-1$, причём времена кипения воды на участке $2-3$ и доливания холодной воды на участке $3-1$ одинаковые. После окончания эксперимента Глюк случайно пролил воду на график, поэтому точка 1, участки $1-2$ и $3-1$ на графике оказались не видны, а единицы измерения одной из осей потеряны.

1. Считая известным коэффициент полезного действия (КПД) газовой плиты $\eta = 0{,}5$, массовый расход газа $\mu_0 = 0{,}14$ г/с и удельную теплоту его сгорания $q = 33$ МДж/кг, определите полезную

мощность плиты P. Здесь коэффициентом полезного действия называется отношение полезной мощности, поступающей к воде в кастрюле, к общей мощности, выделяющейся при сгорании газа.

2. Определите массовый расход холодной воды μ на участке $3-1$.
3. Определите температуру t_1 воды в точке 1. Восстановите вид всей диаграммы.
4. Во сколько раз время τ_{23}, в течение которого вода кипела на участке $2-3$ больше, чем время τ_{12} нагревания воды на участке $1-2$?

Тепловых потерь нет. Испарением на участках $1-2$ и $3-1$ и теплоёмкостью кастрюли пренебречь. Удельная теплота парообразования воды $L = 2{,}3$ МДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг $\cdot$ °C), температура кипения воды $t_{100} = 100\,^\circ$C.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на тепловой баланс с графиком. Цикл состоит из трёх этапов: $1 \to 2$ — нагрев воды массой M до кипения (масса не меняется), $2 \to 3$ — кипение при $100\,^\circ$C, масса убывает, $3 \to 1$ — доливание холодной воды, смесь остывает, масса растёт. Из уцелевшей части графика читаем, во сколько раз выкипела вода; дальше — уравнения энергии для каждого этапа.

Обозначения. P — полезная мощность плиты; m — текущая масса воды; τ_{12}, τ_{23}, τ_{31} — длительности этапов, $\tau_{23} = \tau_{31}$ по условию.

Пункт 1. Полезная мощность. За время $\Delta\tau$ сгорает газ массой $\mu_0\Delta\tau$ и выделяет энергию $q\mu_0\Delta\tau$; воде достаётся доля η:

$$P = \frac{\eta q \mu_0 \Delta\tau}{\Delta\tau} = \eta\mu_0 q = 0{,}5 \cdot 0{,}14 \cdot 10^{-3} \cdot 33 \cdot 10^6 \text{ Вт} \approx 2{,}3 \text{ кВт}.$$

Пункт 2. Расход холодной воды.

1. Что видно на графике. На участке $1 \to 2$ вода не испаряется и не доливается, масса постоянна — участок вертикальный, и точка 1 лежит под точкой 2: $1/m = 1$ у.е. при $m = M$. В точке 3 $1/m = 4$ у.е., то есть масса $M/4$. Выкипело $\frac{3}{4}M$, и столько же долили.

2. Закон сохранения энергии для кипения $2 \to 3$**.** Вся полезная

мощность идёт на испарение:

$$P\tau_{23} = \frac{3}{4}ML.$$

3. Доливание $3 \to 1$**:** $\mu\tau_{31} = \frac{3}{4}M$. Делим уравнения, учитывая $\tau_{23} = \tau_{31}$:

$$\mu = \frac{P}{L} = \frac{\eta\mu_0 q}{L} = \frac{2310\ \text{Вт}}{2{,}3 \cdot 10^6\ \text{Дж/кг}} \approx 1{,}0\ \text{г/с}.$$

Пункт 3. Температура t_1 и вся диаграмма.

4. Уравнение теплового баланса для смешивания на участке $3 \to 1$**.** В кастрюле горячая вода $M/4$ при 100 °C; к моменту, когда масса стала m, долито $m - M/4$ холодной воды (рис. 1). Теплота, отданная горячей водой, равна теплоте, полученной холодной:

$$c\,\frac{M}{4}\,(t_{100} - t) = c\Big(m - \frac{M}{4}\Big)(t - t_\text{x}) \;\Rightarrow\; t = t_\text{x} + \frac{M}{4}(t_{100} - t_\text{x}) \cdot \frac{1}{m}.$$

Температура — линейная функция $1/m$: участок $3 \to 1$ на диаграмме — отрезок прямой.

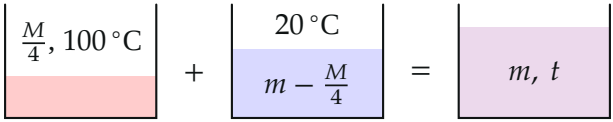

Рис. 1. Смешивание на участке $3 \to 1$*: горячий остаток и долитая холодная вода дают воду массой* m *при температуре* t*.*

5. Точка 1. При $m = M$:

$$t_1 = t_\text{x} + \frac{t_{100} - t_\text{x}}{4} = \frac{t_{100} + 3t_\text{x}}{4} = \frac{100 + 60}{4} = 40\ ^\circ\text{C}.$$

Диаграмма — прямоугольный треугольник с вершинами 1 (1; 40), 2 (1; 100), 3 (4; 100) (рис. 2).

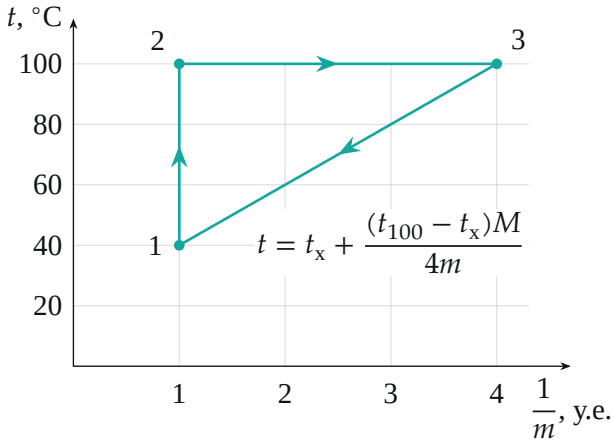

Рис. 2. Восстановленная диаграмма: $1 \to 2$ — нагрев при $m = M$, $2 \to 3$ — кипение, $3 \to 1$ — доливание (отрезок прямой в осях $1/m$, t).

Пункт 4. Отношение времён.

6. Нагрев $1 \to 2$. Уравнение теплового баланса: $P\tau_{12} = cM(t_{100} - t_1)$. Делим уравнение кипения на него:

$$\frac{\tau_{23}}{\tau_{12}} = \frac{\frac{3}{4}ML}{cM(t_{100} - t_1)} = \frac{3L}{4c(t_{100} - t_1)} = \frac{3 \cdot 2{,}3 \cdot 10^6}{4 \cdot 4200 \cdot 60} \approx 6{,}8.$$

Точно 6,845; у организаторов в ответе $\approx 6{,}9$ — то же число, округлённое вверх.

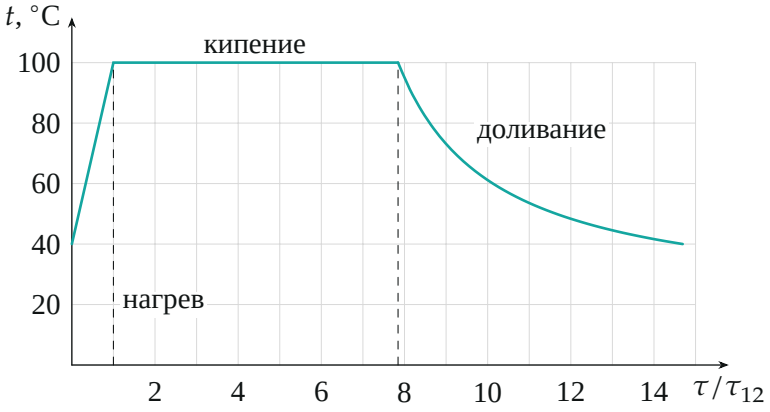

Рис. 3. Температура воды от времени (время в единицах τ_{12}): нагрев, кипение 6,85 τ_{12}, доливание столько же.

Обратите внимание. Ось $1/m$ на графике в «условных единицах», но отношения масс по ней читаются: из точек 2 и 3 следует $m_3 = M/4$. Абсолютные значения M и $1/m$ для ответа не нужны — масса сокращается во всех отношениях.

Проверка. Размерность: $\eta\mu_0 q$ — кг/с·Дж/кг = Вт; P/L — кг/с; $\frac{L}{c\,\Delta t}$ безразмерно. Второй способ для t_1 — по графику: прямая 3 → 1 в осях $(1/m,\ t)$ проходит через $(4;\ 100)$ и при $1/m \to 0$ (бесконечно много холодной воды) даёт $t_\text{х} = 20\,^\circ\text{C}$; при $1/m = 1$: $t = 20 + 80/4 = 40\,^\circ\text{C}$ — совпало. Смысл: испарить воду в 6,8 раза дольше, чем нагреть её на 60 °C, — удельная теплота парообразования огромна по сравнению с $c\,\Delta t$.

Ответ. 1) $P = \eta\mu_0 q \approx 2{,}3$ кВт; 2) $\mu = \eta\mu_0 q/L \approx 1{,}0$ г/с; 3) $t_1 = 40\,^\circ\text{C}$, диаграмма — прямоугольный треугольник с вершинами $(1;\ 40)$, $(1;\ 100)$, $(4;\ 100)$; 4) $\tau_{23}/\tau_{12} = \dfrac{3L}{4c(t_{100} - t_1)} \approx 6{,}8$.