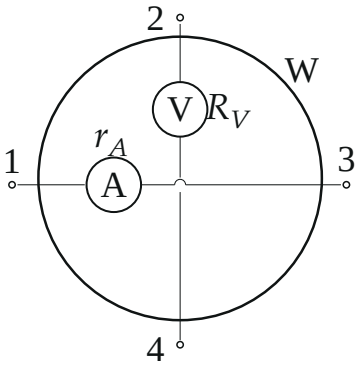
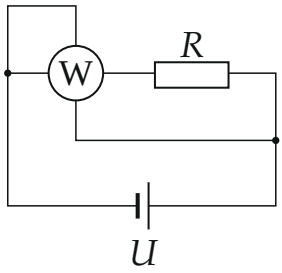
Whatметр

Задача 5. [ВсОШ 2024/25, региональный этап, 9 класс, задача 5] «Whatметр».

Экспериментатор Глюк нашёл на чердаке ваттметр и технический паспорт к нему. В паспорте была схема устройства ваттметра, приведённая на рисунке слева, а также было указано: «Ваттметр выводит на экран модуль произведения показаний амперметра и вольтметра, встроенных внутрь прибора. Контакты 1 и 3 подключены к амперметру с внутренним сопротивлением $r_A = 5$ Ом, а контакты 2 и 4 — к вольтметру с внутренним сопротивлением $R_V =$ ». К сожалению, от времени чернила выцвели, и Глюк не смог разобрать величину сопротивления вольтметра. Кроме того, на приборе не было видно подписей контактов.





Глюк, решив во всём разобраться, собрал цепь, схема которой изображена на рисунке справа. В цепь он включил идеальный источник постоянного напряжения и резистор сопротивлением $R = 500$ Ом. Ваттметр, подключённый к цепи, показал значение $P_1 = 100$ Вт. Затем Глюк вытащил ваттметр из цепи, повернул его на 90° и снова вставил в цепь. После этого прибор показал значение $P_2 = 1{,}0$ Вт. Изображение ваттметра на обеих схемах соответствует его внешнему виду.

1. Определите внутреннее сопротивление вольтметра R_V, считая, что оно больше сопротивления амперметра ($R_V > r_A$).
2. Можно ли, используя те же самые элементы, собрать цепь так, чтобы ваттметр показал значение P_3 в диапазоне от 5 мВт до 20 мВт?

Ответ подтвердите расчётами и приведите либо доказательство невозможности, либо одну схему, удовлетворяющую интервалу.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на цепи с неидеальными приборами. Внутри ваттметра два независимых прибора: амперметр на одной паре противоположных контактов и вольтметр на другой. В схеме Глюка одна пара контактов включена прямо на источник, другая — последовательно с резистором R. Поворот на 90° меняет приборы местами. Какой вариант был первым, неизвестно (подписи стёрлись) — поэтому рассматриваем оба соответствия и отбрасываем то, где $R_V < r_A$. Напряжение источника неизвестно, но сокращается в отношении показаний.

Обозначения. U — напряжение источника; I_A, U_V — показания амперметра и вольтметра; показание ваттметра $P = I_A U_V$.

Пункт 1. Сопротивление вольтметра.

1. Как включены приборы. По схеме: левый и верхний контакты ваттметра соединены с левым узлом, правый — через R с правым узлом, нижний — прямо с правым узлом. Значит, прибор на паре «верх — низ» стоит прямо на источнике, а прибор на паре «лево — право» — последовательно с R (рис. 1).

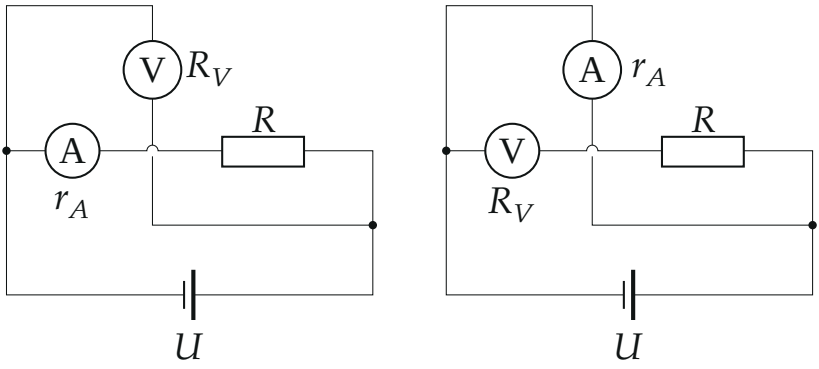


Рис. 1. Два варианта включения: а) вольтметр на источнике, амперметр последовательно с R; б) после поворота — амперметр на источнике, вольтметр последовательно с R.

2. Вариант а (вольтметр на источнике). Источник идеальный, вольтметр показывает $U_V = U$. Через амперметр идёт ток ветви $R + r_A$

— по закону Ома $I_A = \dfrac{U}{R + r_A}$:

$$P_{\text{а}} = \frac{U^2}{R + r_A}.$$

3. Вариант б (амперметр на источнике). Амперметр показывает ток своей ветви $I_A = \dfrac{U}{r_A}$. Вольтметр стоит в ветви с R; ток в ней $\dfrac{U}{R + R_V}$, напряжение на вольтметре $U_V = \dfrac{UR_V}{R + R_V}$:

$$P_{\text{б}} = \frac{U^2}{r_A} \cdot \frac{R_V}{R + R_V}.$$

4. Отношение. U сокращается:

$$k = \frac{P_{\text{а}}}{P_{\text{б}}} = \frac{r_A(R + R_V)}{(R + r_A)R_V} \;\Rightarrow\; R_V = \frac{R}{k\,\dfrac{R + r_A}{r_A} - 1}.$$

5. Два соответствия. Здесь $\dfrac{R + r_A}{r_A} = 101$.

- $P_{\text{а}} = P_1$, $k = 100$: $R_V = \dfrac{500}{10\,100 - 1}$ Ом $\approx 0{,}05$ Ом $< r_A$ — не подходит.
- $P_{\text{а}} = P_2$, $k = 0{,}01$: $R_V = \dfrac{500}{1{,}01 - 1}$ Ом $= 50\,000$ Ом.

$$R_V = 50 \text{ кОм}.$$

Значит, первым был вариант б, а напряжение источника

$$U = \sqrt{P_2(R + r_A)} = \sqrt{505} \text{ В} \approx 22{,}5 \text{ В}.$$

Проверка: $P_{\text{б}} = \dfrac{505}{5} \cdot \dfrac{50\,000}{50\,500} = 100 \text{ Вт} = P_1$.

Пункт 2. Показание 5–20 мВт.

6. Идея. Нужно показание в 50–200 раз меньше $P_2 = 1$ Вт. Умень-

шить его можно, если пустить через амперметр малый ток: включить вольтметр (большое сопротивление) последовательно с источником — он ограничит ток до $\approx U/R_V$, а амперметр включить параллельно R (рис. 2).

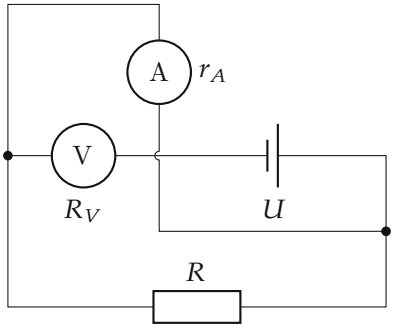


Рис. 2. Схема для пункта 2: вольтметр последовательно с источником, амперметр параллельно резистору R.

7. Расчёт. Эквивалентная схема — рис. 3. Сопротивление параллельного участка $\dfrac{Rr_A}{R+r_A} = 4{,}95$ Ом $\ll R_V$, поэтому по закону Ома для всей цепи

$$I = \frac{U}{R_V + \frac{Rr_A}{R+r_A}} \approx \frac{U}{R_V}.$$

Ток делится между R и r_A обратно сопротивлениям, через амперметр почти весь: $I_A = I\dfrac{R}{R+r_A} \approx I$. Вольтметр показывает $U_V = IR_V \approx U$. Показание ваттметра

$$P_3 = I_A U_V \approx \frac{U^2}{R_V} = \frac{P_2(R+r_A)}{R_V} = \frac{1\cdot 505}{50\,000}\ \text{Вт} \approx 10\ \text{мВт}.$$

Точный расчёт без приближений даёт 9,998 мВт — внутри диапазона 5–20 мВт. Ответ: можно.

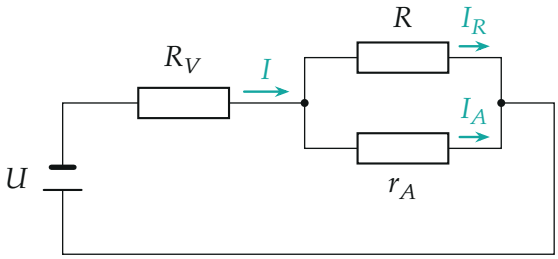


Рис. 3. Эквивалентная схема рис. 2: ток I через вольтметр делится между R и амперметром; $I_A = I\,R/(R + r_A) \approx I$.

Обратите внимание. Ваттметр показывает произведение показаний приборов, а не мощность на каком-то элементе. Поэтому при «неправильном» включении он может показать и 100 Вт, и 10 мВт при одном и том же источнике.

Проверка. Размерность: R_V — Ом (отношение k безразмерно), $P_3 = U^2/R_V$ — Вт. Второй способ для пункта 1: из варианта а $U^2 = P_2(R + r_A) = 505$ В^2; подставляем в вариант б и требуем $P_б = 100$ Вт: $\dfrac{505}{5} \cdot \dfrac{R_V}{500 + R_V} = 100$, откуда $101R_V = 100(500 + R_V)$, $R_V = 50\,000$ Ом — то же. Смысл: вольтметр должен иметь большое сопротивление, и найденное $R_V = 50$ кОм $\gg R$ — так и есть.

Ответ. 1) $R_V = \dfrac{R}{k(R + r_A)/r_A - 1}$ при $k = P_2/P_1$, $R_V = 50$ кОм; 2) можно: вольтметр последовательно с источником, амперметр параллельно резистору R (рис. 2), $P_3 = \dfrac{P_2(R + r_A)}{R_V} \approx 10$ мВт.