Цепная линия

Задача 1. [ВсОШ 2024/25, заключительный этап, 10 класс, практический тур, задача 1] «Цепная линия».

Оборудование: металлическая цепочка массой $m = (10{,}7 \pm 0{,}2)$ г; мерная лента; лист ДВП; штатив с муфтой и лапкой, в которой зажато крепление для цепочки; два листа миллиметровой бумаги для построения графиков.

Задание. На горизонтальной белой поверхности листа ДВП (далее будем называть эту поверхность «рабочей») расположите выданную Вам цепочку так, как показано на рис. 1. Здесь H — высота точки крепления цепочки над рабочей поверхностью, s — длина горизонтальной части цепочки в положении, когда она находится в равновесии при максимально удалённом от штатива свободном конце. Обе части цепочки — и горизонтальная, и висящая в воздухе — должны находиться в одной вертикальной плоскости, проходящей через точку крепления цепочки к лапке штатива. Убедитесь, что цепочка не перекручена и на ней нет узлов или заломов.

Цепочку можно считать однородной. Ускорение свободного падения равно $g = (9{,}80 \pm 0{,}05)$ м/с^2.

Отсоединять цепочку от лапки штатива и перемещать штатив запрещено!

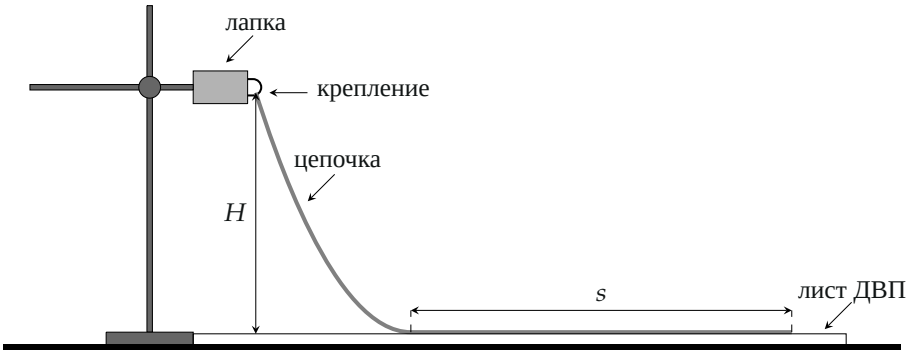


Рис. 1

1. Измерьте длину L выданной цепочки. Оцените погрешность полученного значения.
2. Экспериментально исследуйте зависимость длины s горизонтальной части цепочки от высоты H точки её крепления над рабочей поверхностью. Снимите не менее 15 точек.
3. Выведите формулу теоретической зависимости, связывающей H, s и μ — коэффициент трения звеньев цепочки о рабочую поверхность.
4. Используя экспериментальные данные и результат пункта 3, постройте график зависимости, связывающей s и H. Выберите величины, откладываемые по осям, таким образом, чтобы полученный график был прямой линией.
5. С помощью графика, построенного в пункте 4, определите коэффициент трения μ между звеньями цепочки и рабочей поверхностью. Оцените погрешность полученного значения.
6. Используя экспериментальные значения, полученные в пункте 2, и применяя экстраполяцию, постройте график зависимости $(L-s)$ от H во всём диапазоне $H \in [0; L]$.
7. С помощью полученного в пункте 6 графика вычислите работу A, которую совершает сила, действующая на цепочку со стороны крепления, при медленном подъёме точки крепления от высоты $H_1 = 30{,}0$ см до $H_2 = L$. Оцените погрешность полученного значения. В данном пункте считайте, что в процессе перемещения точка крепления цепочки движется строго вертикально.

▲ **Решение. Что происходит.** Свободный конец цепочки оттянут до упора: лежащая часть на грани скольжения, и сила трения покоя на ней максимальна, μN. Эта сила передаётся натяжением в точку отрыва цепочки от стола. Висящая часть — цепная линия; для неё есть простое точное соотношение: разность натяжений в двух точках цепи равна весу куска цепи длиной, равной разности высот этих точек. Вместе с равновесием висящей части как целого это даёт связь H, s, μ, которую остаётся «выпрямить» подходящими переменными. Работа силы крепления — площадь под графиком $l(H)$.

Обозначения. $l = L - s$ — длина висящей части; $\lambda = m/L$ — масса единицы длины; T_1 — натяжение у крепления (под углом α к горизонту), T_2 — натяжение в точке отрыва от стола (горизонтально).

Пункт 1. Длина цепочки. Разворачиваем лапку так, чтобы цепочка висела вертикально, и измеряем мерной лентой: $L = (99{,}8 \pm 0{,}2)$ см (погрешность — цена деления ленты и неточность совмещения концов).

Пункт 2. Измерения. Для каждой высоты H отводим свободный конец от штатива, пока цепочка не начнёт сползать обратно, и измеряем s. Результаты организаторов (19 точек):

H, см	5,9	6,9	8,5	10,6	12,5	14,4	16,6	18,3	21,2	23,5
s, см	86,7	85,3	83,4	80,9	79,1	76,4	74,3	73,3	70,0	67,8

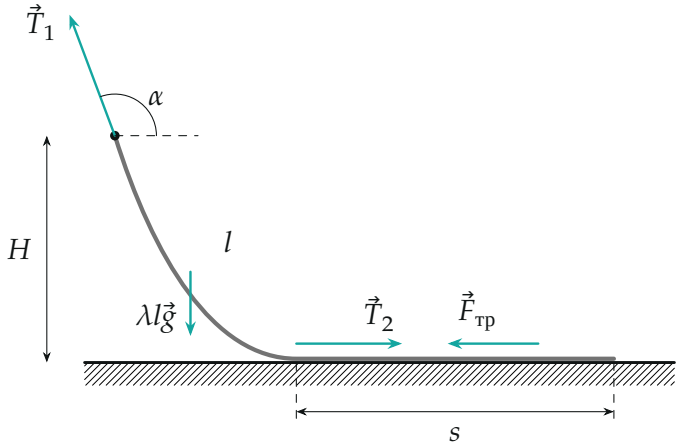
H, см	26,2	29,4	32,2	34,7	37,4	40,1	44,0	46,3	50,8
s, см	65,7	62,4	60,0	57,7	54,8	52,6	49,1	46,9	43,4

Пункт 3. Теория. *Лежащая часть.* Второй закон Ньютона (равновесие) для горизонтального куска длиной s: $N = \lambda g s$, трение покоя максимально и направлено от штатива, его уравновешивает натяжение в точке отрыва:

$$T_2 = \mu \lambda g s.$$

Висящая часть целиком (рисунок ниже): на неё действуют $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ и сила тяжести $\lambda g l$. Проекции условия равновесия на горизонталь и вертикаль:

$$T_1 \cos\alpha = T_2 = \mu \lambda g s, \qquad T_1 \sin\alpha = \lambda g l \;\Rightarrow\; T_1 = \lambda g \sqrt{l^2 + \mu^2 s^2}.$$



Висящая часть l: натяжения T_1 (у крепления) и T_2 (в точке отрыва), её вес. На лежащую часть s действуют T_2 и предельная сила трения.

Разность натяжений. Сдвинем мысленно всю висящую часть вдоль самой себя на малое Δx (виртуальное перемещение): форма кривой не меняется, а итог такой, будто кусок длиной Δx перенесли со стола на высоту H. Работа внешних натяжений на концах равна приращению потенциальной энергии:

$$(T_1 - T_2)\,\Delta x = \lambda\,\Delta x\, gH \;\Rightarrow\; T_1 - T_2 = \lambda g H.$$

Подставим T_1 и T_2 и сократим λg:

$$H = \sqrt{(L-s)^2 + \mu^2 s^2} - \mu s.$$

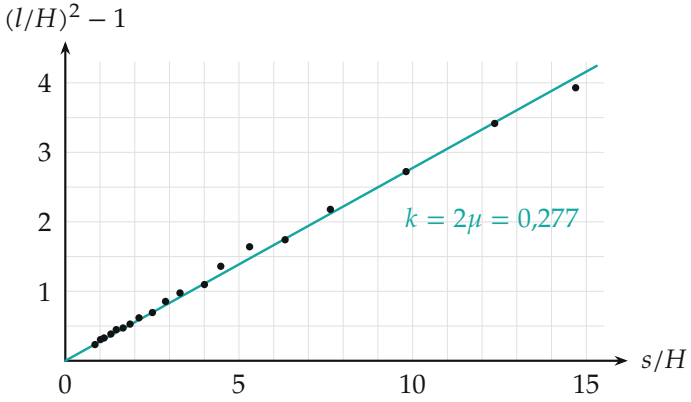
Проверка предельных случаев: $\mu = 0$ — цепь висит вертикально, $H = L - s$; $s = 0$ — $H = L$.

Пункт 4. Линеаризация. Перенесём μs влево и возведём в квадрат: $H^2 + 2\mu s H = l^2$. Разделим на H^2:

$$\left(\frac{l}{H}\right)^2 - 1 = 2\mu\,\frac{s}{H}.$$

В переменных $x = s/H$, $y = (l/H)^2 - 1$ это прямая через начало коор-

динат с наклоном $k = 2\mu$.

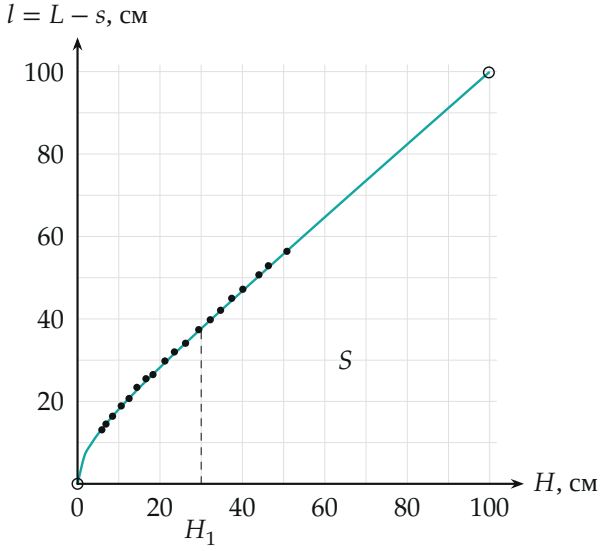


Линеаризованный график по данным пункта 2; прямая через начало, проведённая методом наименьших квадратов.

Пункт 5. Коэффициент трения. Метод наименьших квадратов для прямой $y = kx$ через начало: $k = \sum xy / \sum x^2 = 0{,}277$, статистическая погрешность 0,003. Свободная прямая $y = kx + b$ даёт $k = 0{,}271$, $b = 0{,}05$ — в пределах разброса проходит через начало, как и требует теория. Основная погрешность — систематическая: при малых H ошибка $\Delta H \approx 0{,}3$ см даёт заметную ошибку x и y; по крайним прямым, проходящим через точки с учётом этого, $\Delta k \approx 0{,}02$. Итог:

$$\mu = \frac{k}{2} = 0{,}14 \pm 0{,}01.$$

Пункт 6. Зависимость $l(H)$. Строим экспериментальные точки $l = L - s$ и добавляем два точных: $H = 0$ — цепочка лежит, $l = 0$; $H = L$ — висит вертикально, $l = L$ (кружки на графике). Плавная кривая через них — экстраполяция; на рисунке она построена по формуле пункта 3 с найденным $\mu = 0{,}139$ и проходит через все точки.



Точки — эксперимент, кружки — точные значения $l(0) = 0$ и $l(L) = L$, кривая — по формуле пункта 3. Закрашенная площадь S под кривой от $H_1 = 30$ см до L определяет работу.

Пункт 7. Работа. Поднимем крепление на малое dH. Сила со стороны крепления — $\vec{T}_1$, её работа — произведение вертикальной составляющей на перемещение. Вертикальная составляющая $T_1 \sin\alpha = \lambda g l$ (пункт 3):

$$dA = \lambda g\, l\, dH, \qquad A = \frac{mg}{L}\int_{H_1}^{L} l\, dH = \frac{mg}{L}\, S.$$

От 30 см до L график почти прямой, $l(H_1) \approx 38$ см, поэтому площадь по трапеции:

$$S \approx \frac{38 + 99{,}8}{2} \cdot 69{,}8 \approx 4{,}81 \cdot 10^3 \text{ см}^2,$$

$$A = \frac{0{,}0107 \cdot 9{,}80}{0{,}998} \cdot 0{,}481 \text{ Дж} \approx 50{,}5 \text{ мДж}.$$

Численное интегрирование кривой даёт $S = 4812$ см^2 — то же. *Погрешность:* $\varepsilon_m = 1{,}9\%$, $\varepsilon_g = 0{,}5\%$, $\varepsilon_L = 0{,}2\%$, площадь — $\varepsilon_S \approx$

$\frac{\Delta l(H_1)+\Delta L}{l(H_1)+L} + \frac{\Delta L}{L-H_1} \approx 1{,}2\%$ при $\Delta l(H_1) \approx 1$ см. Сумма относительных погрешностей $\varepsilon_A \approx 3{,}8\%$, $A = (50{,}5 \pm 2)$ мДж.

Обратите внимание. Работа силы крепления не равна приращению потенциальной энергии цепочки: при подъёме лежащая часть скользит к штативу, и часть работы уходит на трение. Поэтому считаем именно через вертикальную составляющую T_1, а не через положение центра масс.

Проверка. Размерность: $\frac{mg}{L}S$ — [Н/м]·[м^2] = Дж. Порядок: подъём всей цепочки на половину длины дал бы $mgL/2 \approx 52$ мДж — близко, как и должно быть при начальной высоте 30 см. Линеаризованная прямая проходит через начало координат (свободный член 0,05 мал на фоне y до 4) — теория пункта 3 подтверждается опытом.

Ответ. 1) $L = (99{,}8 \pm 0{,}2)$ см; 3) $H = \sqrt{(L-s)^2 + \mu^2 s^2} - \mu s$, или $\left(\frac{L-s}{H}\right)^2 - 1 = 2\mu\frac{s}{H}$; 4) прямая в осях s/H и $((L-s)/H)^2 - 1$; 5) $\mu = 0{,}14 \pm 0{,}01$; 7) $A = (50{,}5 \pm 2)$ мДж.