Долгий ящик

Задача 1. [ВсОШ 2024/25, 9 класс, задача 1] «Долгий ящик».

Внимание! Перед выполнением работы ознакомьтесь с условием эксперимента и запишите номер установки! В задаче требуется оценка погрешностей!

Оборудование: механический «серый ящик», линейка 50 см, весы, гайки М4 (5 шт.), канцелярская клипса, масштабно-координатная бумага для построения графиков.

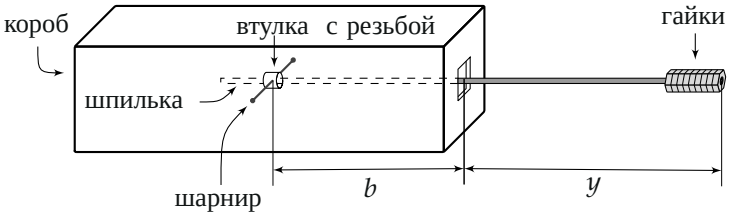
Механический «серый ящик» состоит из короба и шпильки, на один конец которой плотно навинчены 20 гаек М4. Шпилька шарнирно соединена с коробом с помощью втулки с резьбой.

Строго запрещено крутить гайки на шпильке!

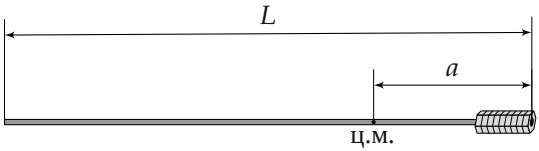
Чтобы уменьшить длину выступающей части, аккуратно вращайте шпильку по часовой стрелке; чтобы увеличить длину выступающей части — против часовой стрелки. При вращении шпильки по/против часовой стрелки вы достигнете предельного положения («упора»), которое проявляется ощутимым сопротивлением или полной невозможностью продолжения вращения.

После достижения упора с любой стороны запрещается продолжать вращение стержня в том же направлении (отвинчивать или завинчивать дальше).

В данной работе вам надо исследовать механический «серый ящик».



При выполнении задания используйте следующие обозначения: y — текущее расстояние от выступающего конца шпильки до внешней стенки короба.

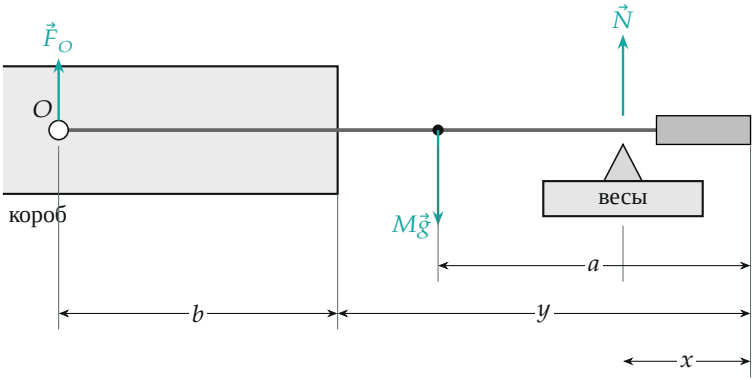


Определите:

1. b — расстояние от внешней стенки короба до оси вращения втулки;
2. M — массу шпильки с гайками;
3. a — расстояние от центра масс шпильки с гайками до края выступающей части;
4. L — длину шпильки.

▲ **Решение. Что происходит.** Шпилька — рычаг с осью в шарнире O внутри короба. Если положить её свободный конец на опору, стоящую на весах, весы покажут силу реакции опоры $N = mg$ (m — показание весов). Сила реакции шарнира нам не известна, поэтому все уравнения пишем как правило моментов относительно оси шарнира: её момент равен нулю. Меняя то точку опоры, то длину выступающей части, получаем линейные зависимости, по наклону и отрезку которых находим b, M и a. Класс задачи — механический «серый ящик»: правило моментов и линеаризация.

Обозначения. O — ось шарнира; b — от стенки до O; y — выступающая часть; a — от центра масс до выступающего конца; x — от конца шпильки до точки опоры; m — показание весов; M — масса шпильки с гайками; $m_г$ и $m_к$ — масса гайки М4 и клипсы.



Шпилька на опоре: шарнир O, сила тяжести $M\vec{g}$ в центре масс, сила реакции опоры $\vec{N}$ (её показывают весы) и сила со стороны шарнира $\vec{F}_O$, которая в правило моментов относительно O не входит.

Пункт 1. Расстояние b.

1. Правило моментов. Шпилька горизонтальна и покоится. Правило моментов относительно оси шарнира (момент $\vec{F}_O$ равен нулю, поэтому эту силу знать не нужно): плечо силы тяжести $y + b - a$, плечо силы реакции $y + b - x$,

$$Mg\,(y + b - a) = N\,(y + b - x), \qquad N = mg.$$

Выразим x так, чтобы получилась прямая:

$$x = (b + y) - M(y + b - a) \cdot \frac{1}{m}.$$

При постоянном y зависимость x от $1/m$ — прямая, отрезок на оси x равен $b + y$. Это и есть идея: продлив прямую до $1/m = 0$, получаем расстояние от конца шпильки до оси шарнира.

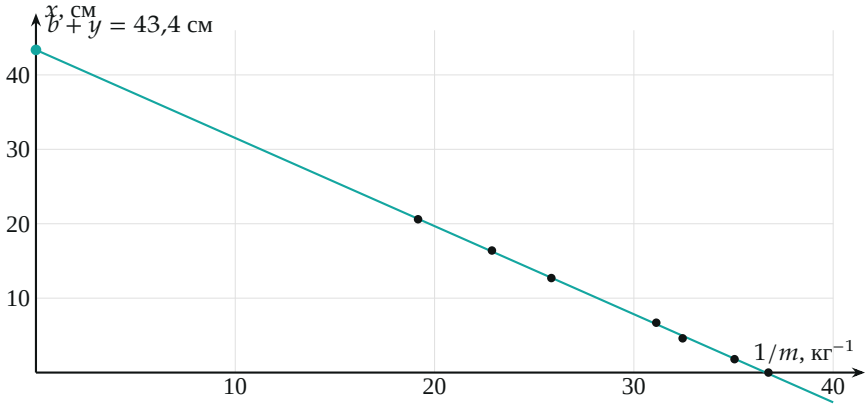
2. Измерения. Фиксируем $y = (25{,}9 \pm 0{,}2)$ см, кладём шпильку на клипсу на весах и сдвигаем клипсу (погрешность x — 0,2 см из-за размера пятна касания, весов — 0,03 г). Горизонтальность контролируем

линейкой по расстоянию до стола.

m, г	27,21	28,53	30,82	32,13	38,67	43,71	52,16
x, см	0	1,8	4,6	6,7	12,7	16,4	20,6
$1/m$, кг$^{-1}$	36,8	35,1	32,4	31,1	25,9	22,9	19,2

3. Обработка. Методом наименьших квадратов: наклон $-1{,}184$ кг·см, отрезок

$$b + y = (43{,}4 \pm 0{,}4)\ \text{см}.$$



Зависимость $x(1/m)$ при $y = 25{,}9$ см: точки опыта и прямая МНК. Продолжение до $1/m = 0$ даёт $b + y$. Отсюда $b = 43{,}4 - 25{,}9 = 17{,}5$ см, погрешность складывается из погрешностей отрезка и y: $\Delta b = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$ см,

$$b = (17{,}5 \pm 0{,}6)\ \text{см}.$$

4. Проверка другим опытом. Выкрутим шпильку до $y = 26{,}0$ см, положим её конец на опору (гайку) на весах и обнулим весы. Поставим на шпильку клипсу с n гайками на расстоянии $l = 25{,}0$ см от конца (у стенки короба), их масса $m_д = m_к + nm_г$, $m_к = 1{,}33$ г, $m_г = 0{,}628$ г. Правило моментов относительно оси шарнира для *добавки*: момент веса груза $m_д g(b+y-l)$ уравновешен приростом момента реакции $m^* g(b+y)$,

где m^* — новое показание весов:

$$m^* = m_д\left(1 - \frac{l}{b+y}\right).$$

Пять измерений ($n = 4\ldots0$: $m_д = 3{,}82;\ 3{,}18;\ 2{,}55;\ 1{,}94;\ 1{,}30$ г и $m^* = 1{,}62;\ 1{,}34;\ 1{,}12;\ 0{,}87;\ 0{,}57$ г) дают прямую через нуль с наклоном $k = 0{,}43 \pm 0{,}01$, откуда $b = l/(1-k) - y = 17{,}8$ см (погрешность около 1,4 см) — согласуется с первым способом.

Пункт 2. Масса M.

1. Опыт с коробом на двух опорах. Ставим короб одним концом на клипсу, другим — на гайку на весах; расстояние между опорами $l_0 = (51{,}0 \pm 0{,}2)$ см. Правило моментов для системы «короб + шпилька» относительно клипсы: момент силы тяжести короба не меняется, а при выкручивании шпильки на y^* её центр масс уходит от клипсы на y^*, и момент силы тяжести шпильки растёт на Mgy^*. Его уравновешивает прирост показаний весов m^*:

$$m^* g l_0 = Mgy^* \ \Rightarrow\ M = \frac{m^* l_0}{y^*}.$$

При $y^* = (21{,}0 \pm 0{,}2)$ см прирост $m^* = (20{,}52 \pm 0{,}03)$ г:

$$M = \frac{20{,}52 \cdot 51{,}0}{21{,}0}\ \text{г} = 49{,}8\ \text{г}, \qquad \frac{\Delta M}{M} = \frac{0{,}2}{51{,}0} + \frac{0{,}03}{20{,}52} + \frac{0{,}2}{21{,}0} \approx 1{,}5\,\%,$$

$$M = (49{,}8 \pm 0{,}7)\ \text{г}.$$

Пункт 3. Расстояние a.

1. Правило моментов при вкручивании шпильки. Опора — под самым концом шпильки ($x = 0$), меняем y. Правило моментов относительно оси шарнира:

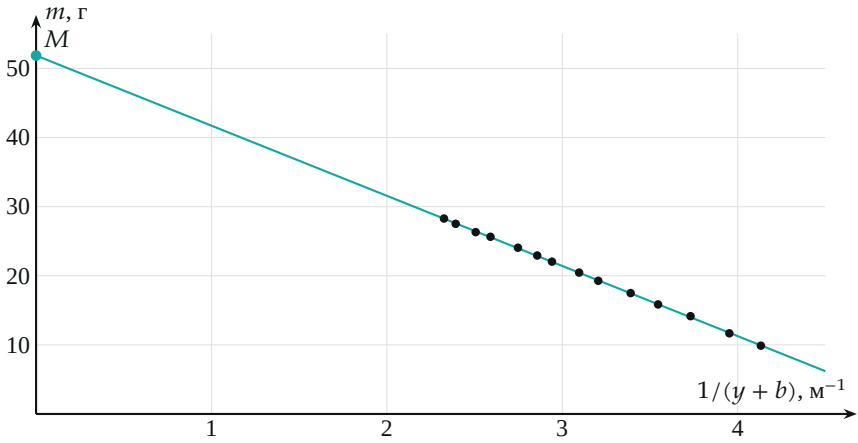
$$Mg(y + b - a) = mg(y + b)\ \Rightarrow\ m = M - Ma \cdot \frac{1}{y+b}.$$

Зависимость m от $1/(y+b)$ — прямая: отрезок на оси m равен M, наклон

равен $-Ma$, а их отношение даёт a.

2. Измерения ($b = 17{,}5$ см):

y, см	25,5	24,3	22,4	21,1	18,9	17,5	16,5
m, г	28,28	27,52	26,31	25,64	24,06	22,93	22,04
y, см	14,8	13,7	12,0	10,7	9,3	7,8	6,7
m, г	20,46	19,27	17,49	15,85	14,15	11,67	9,88



Зависимость m от $1/(y+b)$: прямая МНК по 14 точкам продолжена до $1/(y+b) = 0$, где $m = M$.

3. Обработка. Метод наименьших квадратов даёт отрезок 51,9 г и наклон $-10{,}15$ г·м. Главная погрешность здесь — не разброс точек (он мал), а погрешность b, через которую считается абсцисса: пересчёт при $b = 16{,}9$ и 18,1 см сдвигает отрезок на $\mp 0{,}6$ г и наклон на $\mp 0{,}4$ г·м, а отношение наклона к отрезку — на $\mp 0{,}5$ см:

$$a = \frac{Ma}{M} = \frac{10{,}15\ \text{г}\cdot\text{м}}{51{,}9\ \text{г}} = (19{,}6 \pm 0{,}6)\ \text{см}.$$

Обратите внимание: отрезок этой прямой (51,9 г) — далёкая экстраполяция (точки лежат при $1/(y+b) = 2{,}3 \ldots 4{,}1$ м$^{-1}$), поэтому массу M берём из прямого опыта пункта 2, а из этой прямой — только отношение

a, в котором общий сдвиг масштаба сокращается. Расхождение двух значений M (49,8 и 51,9 г) — мера систематики опыта с шарниром (трение во втулке, неточная горизонтальность).

Пункт 4. Длина шпильки.

1. Модель. Шпилька — однородный стержень длины L и массы $M - 20m_г$; двадцать гаек на её конце — однородная «муфта» длины $c = (5{,}9 \pm 0{,}2)$ см (меряем линейкой) и массы $20m_г$, где $m_г = (3{,}14 \pm 0{,}03)\ г/5 = (0{,}628 \pm 0{,}006)$ г — взвесили пять выданных гаек.

2. Центр масс. Расстояние центра масс системы от выступающего конца — среднее расстояний частей, взвешенное по массам:

$$Ma = (M - 20m_г)\frac{L}{2} + 20m_г\frac{c}{2} \Rightarrow L = \frac{2\,(Ma - 10m_г c)}{M - 20m_г}.$$

С $M = 49{,}8$ г и $a = 19{,}6$ см ($Ma = 976$ г · см):

$$L = \frac{2\,(976 - 10 \cdot 0{,}628 \cdot 5{,}9)}{49{,}8 - 20 \cdot 0{,}628}\ \text{см} = \frac{2 \cdot 939}{37{,}2}\ \text{см} \approx 50\ \text{см}.$$

Погрешность: относительная погрешность числителя $\approx 5\,\%$ (в основном от a и M), знаменателя $\approx 2\,\%$, итого $\approx 7\,\%$:

$$L = (50 \pm 4)\ \text{см}.$$

Проверка. Размерности: b, a, L — длины, $M = m^* l_0 / y^*$ — масса. Разумность: $L = 50$ см больше суммы $b + y_{max} \approx 43$ см (шпилька проходит шарнир и уходит в глубину короба); центр масс ($a \approx 20$ см) ближе к концу с гайками, чем середина шпильки ($L/2 = 25$ см), — так и должно быть из-за гаек. Значение b двумя независимыми опытами: 17,5 и 17,8 см.

Ответ. 1) $b = (17{,}5 \pm 0{,}6)$ см; 2) $M = (49{,}8 \pm 0{,}7)$ г; 3) $a = (19{,}6 \pm 0{,}6)$ см; 4) $L = (50 \pm 4)$ см.