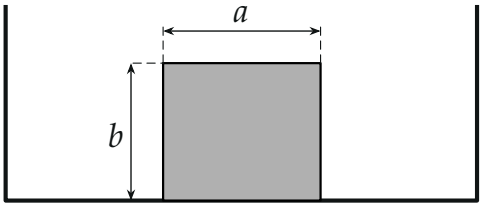
Всплывающий брусок

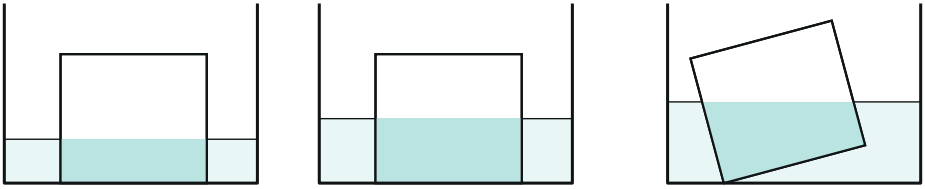
Задача 1. [ВсОШ 2025/26, 10 класс, задача 1] На дне сосуда с плоским горизонтальным дном лежит длинный однородный брусок, поперечное сечение которого представляет собой прямоугольник со сторонами a и $b = a\sqrt{7}/3$ (см. рис.). В сосуд медленно наливают воду.



При какой высоте H уровня воды в сосуде брусок перестанет касаться дна? Плотность материала бруска равна 50% от плотности воды. Длина бруска много больше a. Из-за шероховатости поверхностей бруска и дна сосуда вода свободно подтекает между ними.

▲ **Решение. Что происходит.** Пока воды мало, архимедова сила меньше веса, и брусок лежит на дне. Когда уровень достигает $b/2$, сила Архимеда сравнивается с весом — но положение «плашмя» при таких сторонах неустойчиво, и брусок начинает поворачиваться вокруг продольной оси. Свободно плавать он может только в устойчивом наклонном положении, поэтому всплывёт именно в нём. Задача сводится к двум вопросам: каков этот угол α и при каком уровне H_* брусок в этом положении перестаёт упираться ребром в дно.

Обозначения. $\rho_в$ — плотность воды, L — длина бруска. O — центр прямоугольного сечения (центр тяжести бруска), B — центр тяжести погружённой части сечения (точка приложения силы Архимеда), α — угол между широкой гранью сечения и горизонталью, H — высота уровня воды над дном. Брусок поворачивается вокруг оси, перпендикулярной плоскости сечения.



$H < b/2$ $H = b/2$ $b/2 < H < H_*$

Этапы: брусок лежит плашмя, пока $H < b/2$; при $H = b/2$ сила Архимеда равна весу и положение плашмя теряет устойчивость; дальше брусок наклоняется, касаясь дна нижним ребром (H_* — искомый уровень).

1. Свободное плавание: ватерлиния проходит через O. Брусок плавает, значит, сила Архимеда равна весу:

$$\rho_в\, g\, V_{погр} = \tfrac{1}{2}\rho_в\, g\, abL \quad \Rightarrow \quad V_{погр} = \tfrac{1}{2}\, abL.$$

Погружена ровно половина объёма, то есть половина площади сечения. Прямая, делящая прямоугольник на две равные по площади части, проходит через его центр. Поэтому при любом наклоне уровень воды проходит через точку O.

2. Условие равновесия. Вес приложен в O, сила Архимеда — в B. Брусок в равновесии, если эти точки лежат на одной вертикали: горизонтальное смещение x_B точки B относительно O равно нулю. Найдём x_B для наклона α.

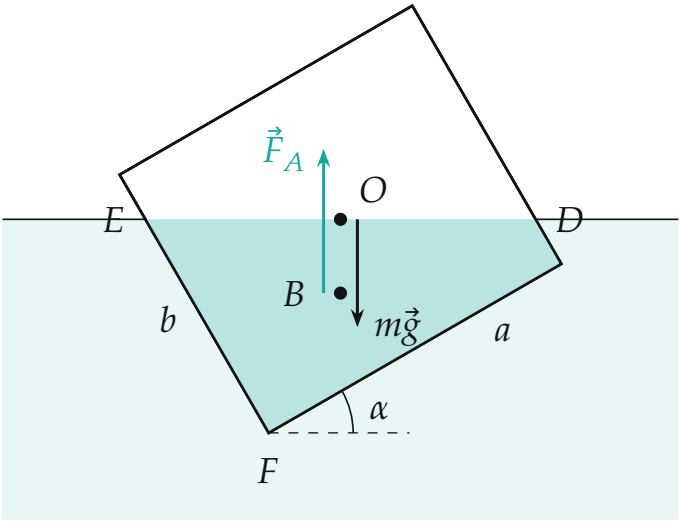
Введём оси в теле бруска: u вдоль стороны a, w вдоль стороны b, начало в O. Ватерлиния — горизонтальная прямая через O; в этих осях её уравнение $w = -u\tan\alpha$. Погружённая часть — трапеция $-b/2 \le w \le -u\tan\alpha$, $-a/2 \le u \le a/2$; её высота при данном u равна $h(u) = b/2 - u\tan\alpha$, площадь $S = ab/2$. Координаты центра тяжести:

$$u_B = \frac{1}{S}\int_{-a/2}^{a/2} u\, h(u)\, du = -\frac{a^2\tan\alpha}{6b},$$

$$w_B = \frac{1}{S}\int_{-a/2}^{a/2} \frac{-b/2 - u\tan\alpha}{2}\, h(u)\, du = -\frac{b}{4} + \frac{a^2\tan^2\alpha}{12b}.$$

Горизонтальная координата: $x_B = u_B \cos\alpha - w_B \sin\alpha$, откуда

$$x_B = \frac{\sin\alpha}{12\,b}\left(3b^2 - 2a^2 - a^2\tan^2\alpha\right).$$



Брусок плавает при $\alpha = 30°$: ватерлиния ED проходит через O, точка B лежит на одной вертикали с O (стрелки $m\vec{g}$ и $\vec{F}_A$ сдвинуты в стороны только для ясности).

3. Угол и устойчивость. Равновесие, $x_B = 0$, возможно при $\alpha = 0$ или при $\tan^2\alpha = \dfrac{3b^2 - 2a^2}{a^2}$. При $b^2 = \dfrac{7}{9}a^2$:

$$\tan^2\alpha = 3\cdot\frac{7}{9} - 2 = \frac{1}{3}, \qquad \alpha = 30°.$$

Устойчивость определяет знак x_B. Если $x_B > 0$, сила Архимеда приложена правее O и поворачивает брусок так, что α растёт; если $x_B < 0$ — возвращает назад. Пока $\alpha < 30°$, скобка в x_B положительна, и угол растёт; при $\alpha > 30°$ — отрицательна, и угол уменьшается. Значит, $30°$ — устойчивое положение. Для малых α получаем $x_B \approx \alpha\,\dfrac{a^2}{36\,b} > 0$: поло-

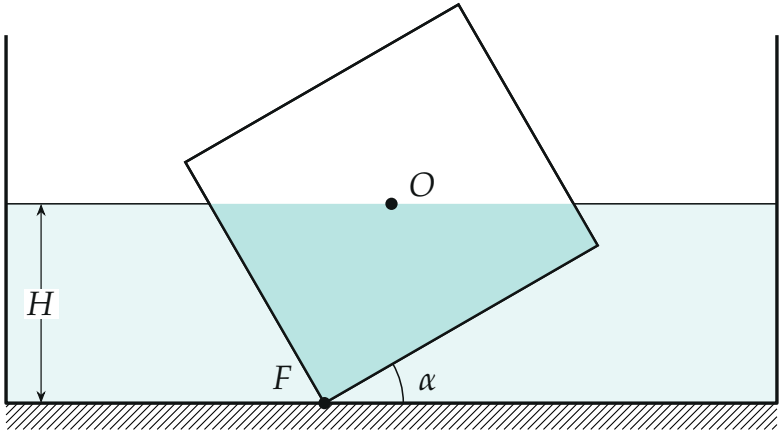
жение плашмя неустойчиво (устойчивым оно было бы при $b^2 < \frac{2}{3}a^2$).

Обратите внимание: ответ не $b/2$. При $H = b/2$ сила Архимеда уже равна весу, но брусок ещё касается дна ребром: плашмя он плавать не может (неустойчиво), а в устойчивом положении $30°$ ему мешает дно. Оторваться он может, лишь когда уровень поднимет центр O на высоту, найденную ниже.

4. Когда брусок перестаёт касаться дна. Центр O находится на уровне воды, а нижнее ребро F — ниже O на $\frac{a\sin\alpha + b\cos\alpha}{2}$. Если H меньше этой величины, при $\alpha = 30°$ ребро оказалось бы ниже дна, чего быть не может: брусок остаётся на дне, касаясь его ребром и наклонившись на меньший угол. Когда H достигает

$$H = \frac{a\sin\alpha + b\cos\alpha}{2}\Big|_{\alpha=30°} = \frac{a}{4} + \frac{\sqrt{3}\,b}{4} = \frac{\sqrt{7/3}+1}{4}\,a \approx 0{,}632\,a,$$

брусок свободно плавает в устойчивом положении, и ребро дна больше не касается.



Момент отрыва: ребро F только касается дна, O на высоте H, угол $\alpha = 30°$.

Проверка. При $b^2 = \frac{2}{3}a^2$ (граница устойчивости положения плашмя) формула даёт $\alpha = 0$ и $H = b/2$: плавание плашмя и ответ переходят

друг в друга. Наш случай $b \approx 0{,}882\,a$ лежит выше границы ($0{,}816\,a$), и $H \approx 0{,}632\,a$ больше $b/2 \approx 0{,}441\,a$, но меньше b: сечение не затоплено целиком. Численная проверка по многоугольнику: центр погружённой части лежит под O при $\alpha = 30{,}0°$, при $5°$–$20°$ он правее, при $31°$ и $40°$ — левее.

Смысл: лёгкий брусок «не хочет» лежать плашмя и поворачивается; из-за этого ему нужно больше воды, чем $b/2$, чтобы оторваться — ровно настолько, чтобы наклонённое ребро поднялось от дна.

Ответ. $H = \dfrac{\sqrt{7/3}+1}{4}\,a \approx 0{,}632\,a.$