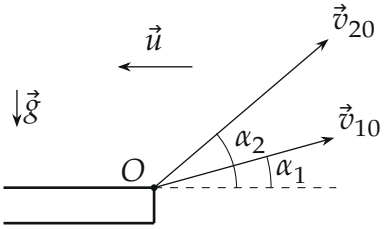
Двое против ветра

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, 10 класс, задача 2] С высокого, но узкого моста над рекой одновременно и практически из одной точки O бросили два одинаковых шарика: первый — под углом $\alpha_1 = 10°$ к горизонту со скоростью $v_{10} = 8$ м/с, второй — под углом $\alpha_2 = 50°$ к горизонту (см. рис.).



В районе моста дует сильный горизонтальный ветер, в результате чего шарики спустя достаточно большое время стали двигаться по параллельным прямым, всё время находясь на **одной вертикали** на расстоянии $L = 6$ м друг от друга. Известно, что первый шарик упал в воду спустя $\tau = 5$ с после броска, а второй упал позднее. Считая, что величина и направление скорости ветра всюду одинаковы и не меняются со временем, определите:

1. начальную скорость второго шарика v_{20};
2. высоту моста H над поверхностью воды;
3. скорость ветра u, если известно, что оба шарика пересекли вертикаль, проходящую через точку O, на одинаковом от неё **расстоянии**.

Траектории обоих шариков лежат в одной плоскости, параллельной вектору $\vec{u}$. Сила, действующая на шарик со стороны воздуха, определяется формулой $\vec{F} = -k\vec{v}_{\text{отн}}$, где $\vec{v}_{\text{отн}}$ — скорость шарика относительно воздуха, а k — коэффициент пропорциональности. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Воздух тормозит шарик относительно себя: чем больше скорость относительно воздуха, тем больше сила $F =$

$kv_{\text{отн}}$. Поэтому любой шарик со временем выходит на одну и ту же *установившуюся* скорость, при которой сила сопротивления уравновешивает тяжесть, а ветер просто сносит шарик вместе с воздухом. Главная идея — записать второй закон Ньютона для малого промежутка dt и просуммировать: так получается связь между изменением скорости и смещением без решения дифференциальных уравнений. У пары шариков ветер и тяжесть при вычитании уравнений сокращаются.

Обозначения. Ось x направим горизонтально вправо (туда, куда смотрят проекции начальных скоростей), ось y — вертикально вверх, начало отсчёта — точка O. Вектор скорости воздуха $\vec{u}$ направлен влево, его модуль u. Введём постоянную времени $\theta = m/k$; она измеряется в секундах и ещё нам понадобится.

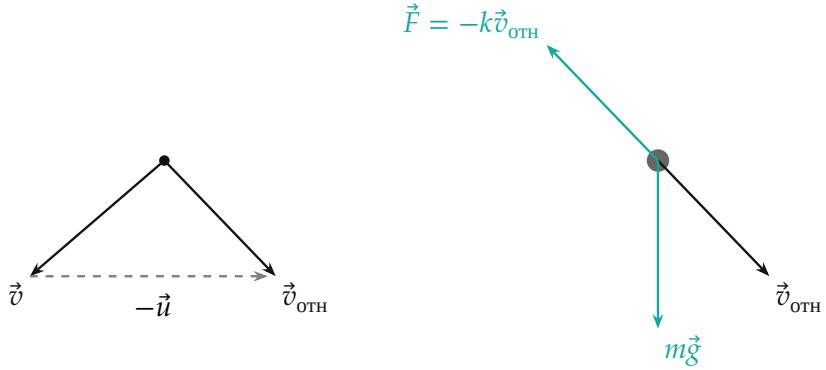


Рис. 1. Скорость шарика относительно воздуха $\vec{v}_{отн} = \vec{v} - \vec{u}$ и силы на шарик (рисунок для $t = 1$ с; сила сопротивления направлена против $\vec{v}_{отн}$, а не против $\vec{v}$)

Пункт 1.

1. Второй закон Ньютона для каждого шарика. Сила воздуха пропорциональна скорости относительно воздуха, то есть $\vec{v} - \vec{u}$ (рис. 1). Запишем второй закон Ньютона для первого и второго шариков векторно:

$$m\vec{a}_1 = m\vec{g} - k(\vec{v}_1 - \vec{u}),$$
$$m\vec{a}_2 = m\vec{g} - k(\vec{v}_2 - \vec{u}).$$

Вычтем одно уравнение из другого: тяжесть и ветер сократятся, и останется

$$m\vec{a}_r = -k\vec{v}_r, \qquad \vec{a}_r = \vec{a}_2 - \vec{a}_1, \quad \vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Здесь $\vec{v}_r$ — скорость второго шарика относительно первого.

2. Малый промежуток времени и суммирование. Пусть $\vec{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ — вектор от первого шарика ко второму. За малое время dt относительная скорость меняется на $d\vec{v}_r = \vec{a}_r\,dt$, а вектор $\vec{l}$ — на $d\vec{l} = \vec{v}_r\,dt$. Умножим уравнение на dt/m:

$$d\vec{v}_r = -\frac{k}{m}\,\vec{v}_r\,dt = -\frac{1}{\theta}\,d\vec{l}.$$

Это верно в любой момент, поэтому просуммируем от броска до момента «спустя достаточно большое время»:

$$\Delta\vec{v}_r = -\frac{1}{\theta}\,\Delta\vec{l}.$$

3. Начало и конец. В начале шарики в одной точке: $\vec{l} = \vec{0}$, $\vec{v}_r = \vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}$. В конце они летят по параллельным прямым с одинаковой скоростью, значит $\vec{v}_r = \vec{0}$, а $\vec{l} = \vec{L}$ — вертикальный вектор длиной L, направленный вверх, потому что второй шарик упал позже и находится выше. Подставляем:

$$\vec{0} - (\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}) = -\frac{1}{\theta}\,(\vec{L} - \vec{0}) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{20} - \vec{v}_{10} = \frac{\vec{L}}{\theta}. \tag{1}$$

Разность начальных скоростей вертикальна (рис. 2).

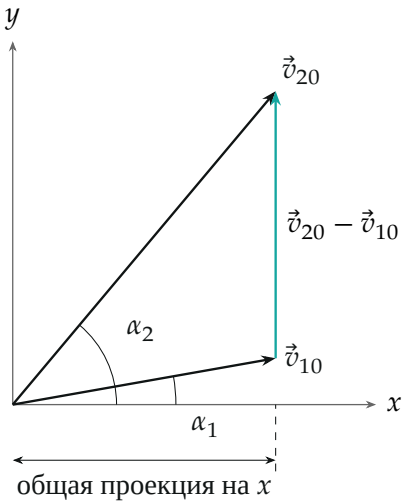


Рис. 2. Начальные скорости: разность $\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}$ вертикальна, поэтому горизонтальные проекции $\vec{v}_{10}$ и $\vec{v}_{20}$ равны

4. Проекция на горизонталь. Вектор $\vec{L}$ горизонтальной проекции не имеет, поэтому

$$v_{20}\cos\alpha_2 - v_{10}\cos\alpha_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{20} = v_{10}\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2},$$

$$v_{20} = 8 \cdot \frac{\cos 10^\circ}{\cos 50^\circ} \approx 12{,}3 \text{ м/с}.$$

Обратите внимание: «находятся на одной вертикали» — не случайность, а следствие равенства горизонтальных проекций. Раз уравнения для x у шариков одинаковы, а начальные проекции совпадают, шарики всё время на одной вертикали.

Пункт 2.

1. Постоянная θ. Спроецируем (1) на вертикальную ось:

$$v_{20}\sin\alpha_2 - v_{10}\sin\alpha_1 = \frac{L}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{L}{v_{20}\sin\alpha_2 - v_{10}\sin\alpha_1},$$

$$\theta = \frac{6}{9{,}39 - 1{,}39} \text{ с} = 0{,}75 \text{ с}.$$

2. Первый шарик по вертикали. Ветер горизонтален, поэтому в проекции на ось y второй закон Ньютона для первого шарика: $m\,dv_y/dt = -mg - kv_y$. Умножим на dt/m и учтём $dy = v_y\,dt$:

$$dv_y = -g\,dt - \frac{1}{\theta}\,dy.$$

Просуммируем от броска до падения (время τ). Вертикальная скорость меняется от $v_{10}\sin\alpha_1$ до $v_y(\tau)$, координата — от 0 до $-H$:

$$v_y(\tau) - v_{10}\sin\alpha_1 = -g\tau + \frac{H}{\theta}.$$

3. Скорость в момент падения. За $\tau = 5$ с, которые в $\tau/\theta \approx 6{,}7$ раза больше постоянной θ, вертикальная скорость уже установилась: $dv_y = 0$, то есть $mg = k|v_y|$ и $v_y = -g\theta$ (знак минус — вниз). Подставляем:

$$-g\theta - v_{10}\sin\alpha_1 = -g\tau + \frac{H}{\theta} \quad\Rightarrow\quad H = \theta(g\tau - g\theta - v_{10}\sin\alpha_1),$$

$$H = 0{,}75\,(50 - 7{,}5 - 1{,}39)\text{ м} \approx 30{,}8\text{ м}.$$

Обратите внимание: установившаяся вертикальная скорость $g\theta$ не зависит ни от ветра, ни от угла броска — ветер горизонтален и вертикальную скорость не меняет.

Пункт 3.

1. Центр масс пары. Сложим уравнения из пункта 1 и разделим на $2m$. Масса у шариков одинаковая, поэтому скорость центра масс $\vec{v}_c = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)/2$:

$$\vec{a}_c = \vec{g} - \frac{1}{\theta}(\vec{v}_c - \vec{u}) = -\frac{1}{\theta}(\vec{v}_c - \vec{v}_f), \qquad \vec{v}_f = \vec{u} + \theta\vec{g}.$$

Вектор $\vec{v}_f$ — установившаяся скорость любого шарика: при $\vec{v} = \vec{v}_f$ сила воздуха уравновешивает тяжесть, ускорение нулевое. Её проекции $(-u;\ -g\theta)$: воздух сносит шарик влево, а тяжесть опускает вниз.

2. Система отсчёта, падающая со скоростью $\vec{v}_f$. Перейдём в систе-

му отсчёта K', движущуюся с постоянной скоростью $\vec{v}_f$. Скорость центра масс в ней $\vec{w} = \vec{v}_c - \vec{v}_f$, и $d\vec{w}/dt = -\vec{w}/\theta$: ускорение направлено против скорости. Значит, в K' центр масс движется *по прямой*, вдоль начального вектора $\vec{w}_0 = \vec{v}_{c0} - \vec{v}_f$.

3. Условие задачи. В момент t_1 шарики на одной вертикали, проходящей через O, на равных расстояниях от O. Они не могут быть в одной точке, значит, один выше O, другой ниже, а центр масс — ровно в точке O. В начале броска центр масс тоже в O. В системе K' точка O движется со скоростью $-\vec{v}_f$, то есть сдвигается вдоль $\vec{v}_f$. Прямая, по которой центр масс идёт в K', проходит через два положения точки O (в моменты 0 и t_1), поэтому $\vec{w}_0 \parallel \vec{v}_f$, а вместе с ним и

$$\vec{v}_{c0} \parallel \vec{v}_f.$$

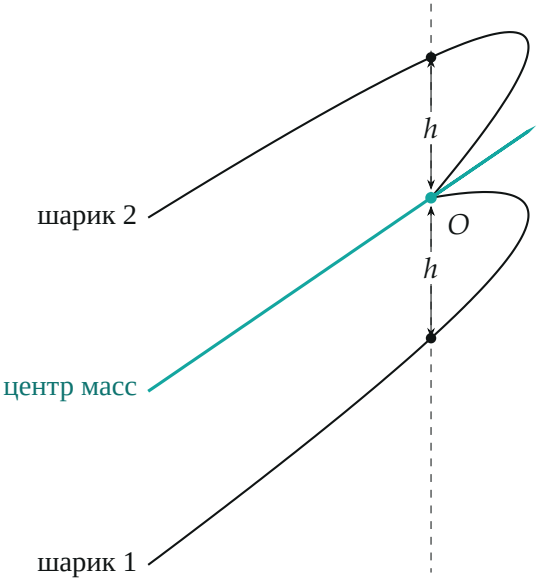


Рис. 3. Начало движения крупно: в момент $t_1 \approx 0{,}9$ с шарики пересекают вертикаль через O на расстояниях h выше и ниже O, а центр масс (бирюзовая линия) по той же прямой возвращается в O

4. Проекции. Из равенства горизонтальных проекций (пункт 1) и $\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$, $v_{20}\cos\alpha_2 = v_{10}\cos\alpha_1$ получаем проекции вектора $\vec{v}_{c0} = (\vec{v}_{10} + \vec{v}_{20})/2$:

$$\vec{v}_{c0} = \Big(v_{10}\cos\alpha_1;\ \tfrac{1}{2}\,v_{10}\cos\alpha_1\,(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2)\Big).$$

Проекции вектора $\vec{v}_f$ — $(-u;\ -g\theta)$. Параллельность означает равенство отношений проекций:

$$\frac{v_{10}\cos\alpha_1}{\frac{1}{2}v_{10}\cos\alpha_1(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2)} = \frac{u}{g\theta} \quad\Rightarrow\quad u = \frac{2g\theta}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2},$$

$$u = \frac{2\cdot 10\cdot 0{,}75}{0{,}176 + 1{,}192}\ \text{м/с} \approx 11{,}0\ \text{м/с}.$$

Обратите внимание: векторы $\vec{v}_{c0}$ и $\vec{v}_f$ параллельны, но направлены в противоположные стороны (рис. 4): центр масс сначала летит вправо и вверх, тормозится и возвращается через O. Раз $\vec{v}_c \parallel \vec{v}_f$ в любой момент, и в земной системе центр масс ходит по одной прямой через O — туда и обратно (рис. 3), хотя сами шарики летят по кривым.

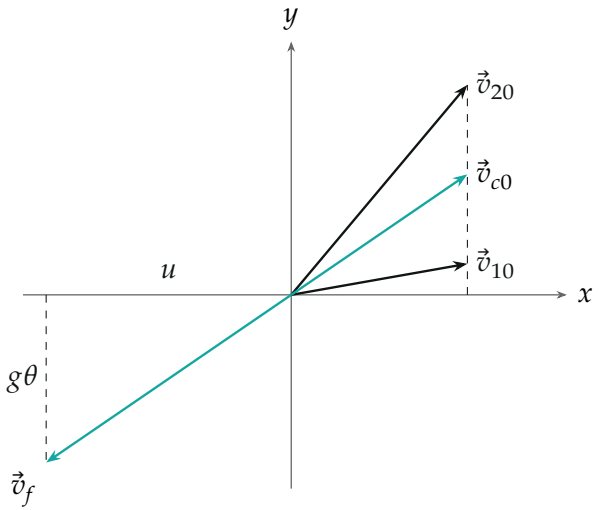


Рис. 4. Начальные скорости $\vec{v}_{10}$, $\vec{v}_{20}$, их полусумма $\vec{v}_{c0}$ и установившаяся

скорость $\vec{v}_f$; $\vec{v}_{c0}$ и $\vec{v}_f$ лежат на одной прямой и направлены противоположно

Проверка. Размерности: $\theta = L/\Delta v$ — секунды, H — метры, u — м/с. Подставим найденные θ и u в точные решения уравнений движения, например $x(t) = \theta(v_{x0} + u)(1 - e^{-t/\theta}) - ut$ и $y(t) = \theta(v_{y0} + g\theta)(1 - e^{-t/\theta}) - g\theta t$. Шарики пересекают вертикаль $x = 0$ при $t_1 \approx 0{,}90$ с на высотах $+2{,}10$ м и $-2{,}10$ м; первый падает на $H = 30{,}84$ м при $t = 5$ с (остаток экспоненты $e^{-\tau/\theta} \approx 1{,}3\cdot10^{-3}$ меняет H лишь на 0,01 м), второй падает при $t \approx 5{,}8$ с, то есть позже — как и требовалось; при $t \to \infty$ расстояние между шариками стремится к $\theta(v_{20}\sin\alpha_2 - v_{10}\sin\alpha_1) = 6$ м (рис. 5).

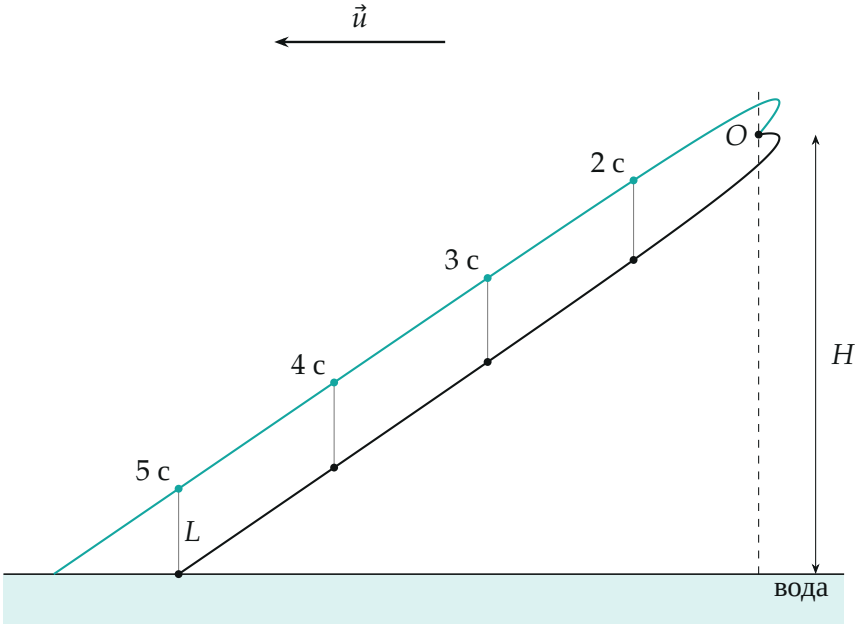


Рис. 5. Траектории шариков при найденных $\theta = 0{,}75$ с и $u = 11$ м/с (чёрная — первого, бирюзовая — второго); в каждый момент шарики на одной вертикали, на больших временах расстояние между ними стремится к L

Ответ. 1) $v_{20} = v_{10}\cos\alpha_1/\cos\alpha_2 \approx 12{,}3$ м/с; 2) $H = \theta\,(g\tau - g\theta - v_{10}\sin\alpha_1) \approx 30{,}8$ м, где $\theta = m/k = L/(v_{20}\sin\alpha_2 - v_{10}\sin\alpha_1) = 0{,}75$ с; 3) $u = 2g\theta/(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2) \approx 11{,}0$ м/с.