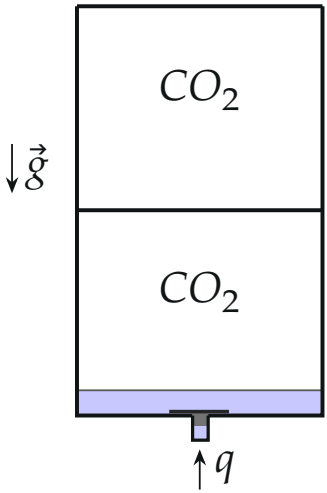
Газировка под поршнем

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, 10 класс, задача 3] Вертикально расположенный цилиндрический сосуд разделён на две равные части объёмом $V_0 = 6{,}6$ л каждая лёгким горизонтальным газонепроницаемым поршнем, который может перемещаться без трения. Площадь поперечного сечения сосуда $S = 128$ см^2. В обеих частях сосуда находятся одинаковые количества углекислого газа при давлении $P_0 = 164$ кПа и температуре $T_0 = 274$ К.



В момент времени $t = 0$ с в нижнюю часть сосуда через клапан в его дне начинает медленно поступать холодная вода с постоянным объёмным расходом $q = 0{,}004$ л/с. Поступившая вода постоянно перемешивается так, что углекислый газ растворяется в ней до равновесного состояния. Температура воды и газа в обеих частях сосуда поддерживается постоянной и равной T_0. Работа насоса, подающего воду, прекращается в момент, когда давление газа в верхней части сосуда достигает значения $P_{\text{кр}} = 410$ кПа.

Когда углекислый газ находится над поверхностью жидкости, масса CO_2, растворённого при температуре T_0 в 1 м^3 жидкости, в равновесном состоянии равна $\mu_{\text{р}} = k \cdot P$, где $k = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ кг/(Па $\cdot$ м^3), а P —

парциальное давление углекислого газа, контактирующего с поверхностью жидкости (закон Генри).

Молярная масса углекислого газа $M = 44$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(К · моль). Давлением насыщенных паров воды, изменением объёма воды при растворении в ней газа и объёмом клапана пренебречь.

1. С какой скоростью и в каком направлении движется поршень в начальный момент времени?
2. Через какое время с момента включения насоса достигается минимальное давление в верхней части сосуда?
3. Определите минимальное давление в верхней части сосуда за время работы насоса.
4. Сколько времени проработал насос до своего выключения?
5. Постройте график зависимости объёма газа в верхней части сосуда от времени. Укажите на нём координаты характерных точек.

▲ **Решение. Что происходит.** Вода вытесняет газ из нижней части и одновременно его растворяет. Нижний газ «исчезает» двумя способами: его объём занимает вода и часть молекул уходит в раствор. Лёгкий поршень выравнивает давления сверху и снизу, температура постоянна, поэтому по уравнению Менделеева — Клапейрона объём газа пропорционален его массе. Главная идея: записать баланс массы нижнего газа с законом Генри и выразить объёмы верхней и нижней частей через время. Когда нижний газ растворится целиком, растворение прекратится, и верхний газ просто сжимается по закону Бойля — Мариотта.

Обозначения. $V_в$ — объём газа в верхней части, V_1 — объём газа под поршнем, $V_2 = qt$ — объём воды в нижней части (рис. 1); P — общее давление газа; $m_в$, m_1 — массы газа в верхней и нижней частях, m_2 — масса растворённого газа. Для краткости введём безразмерную величину

$$a = \frac{kRT_0}{M} = \frac{3{,}17 \cdot 10^{-5} \cdot 8{,}31 \cdot 274}{0{,}044} \approx 1{,}64.$$

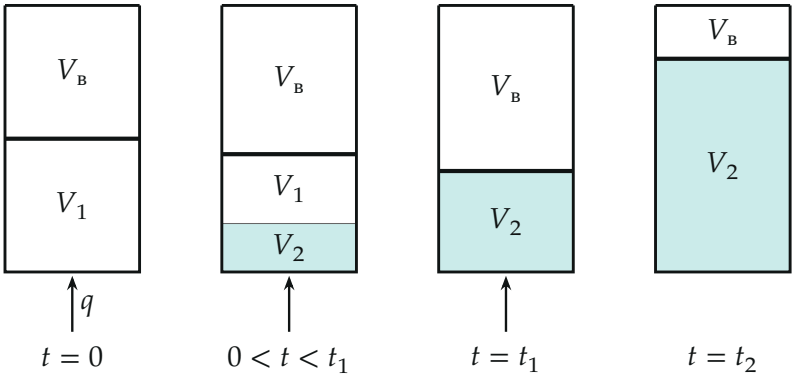


Рис. 1. Состояния сосуда: в начале; в промежуточный момент (газ под поршнем ещё есть); в момент t_1, когда газ под поршнем растворился целиком; после выключения насоса в момент t_2

1. Объёмы. Весь объём сосуда $2V_0$ занят верхним газом, нижним газом и водой (изменением объёма воды при растворении газа пренебрегаем):

$$V_в + V_1 + qt = 2V_0. \tag{1}$$

2. Масса газа внизу. Пока под поршнем есть газ ($V_1 > 0$), поршень лёгкий, поэтому давление P по обе стороны от него одинаково. Закон Генри для воды объёмом $V_2 = qt$ даёт массу растворённого газа $m_2 = \mu_р V_2 = kPqt$. Углекислый газ верхней части не растворяется (над поршнем воды нет), поэтому $m_в$ постоянна и в начале равна массе нижнего газа. Значит, в момент t в нижней части в виде газа осталось

$$m_1 = m_в - m_2 = m_в - kPqt. \tag{2}$$

3. Уравнение Менделеева — Клапейрона для каждой части. Температура T_0 везде одна, давление одно:

$$PV_в = \frac{m_в RT_0}{M}, \qquad PV_1 = \frac{m_1 RT_0}{M}.$$

Вычтем второе уравнение из первого, подставим (2) и сократим на P:

$$V_в - V_1 = \frac{m_2 RT_0}{MP} = \frac{kRT_0}{M}\,qt = a\,qt. \qquad (3)$$

4. Решаем систему. Из (1) и (3) складыванием и вычитанием:

$$V_в = V_0 + \frac{qt}{2}\,(a-1), \qquad V_1 = V_0 - \frac{qt}{2}\,(a+1). \qquad (4)$$

Эти формулы верны, пока $V_1 > 0$.

Пункт 1. Так как $a \approx 1{,}64 > 1$, объём $V_в$ растёт с постоянной скоростью $(a-1)q/2$: верхняя часть увеличивается, а значит, поршень движется *вниз*. Скорость поршня равна скорости роста объёма верхней части, делённой на площадь сечения:

$$v = \frac{1}{S}\frac{dV_в}{dt} = \frac{q}{2S}\,(a-1) = \frac{4\ \text{см}^3/\text{с}}{256\ \text{см}^2}\cdot 0{,}64 \approx 0{,}01\ \text{см/с}.$$

Обратите внимание: вода прибывает снизу, а поршень уходит вниз — растворённый газ «занимает» в пересчёте на объём газа больше, чем сама вода ($a > 1$): газа внизу убывает быстрее, чем прибывает воды, и верхний газ расширяется.

Пункт 2. Из (4) видно, что V_1 уменьшается и обращается в нуль в момент

$$t_1 = \frac{2V_0}{q\,(a+1)} = \frac{2\cdot 6{,}6\ \text{л}}{0{,}004\ \text{л/с}\cdot 2{,}64} \approx 1250\ \text{с}.$$

К этому моменту нижний газ растворился целиком, а вода дошла до поршня. Дальше воды в нижней части становится больше, а газа там нет, растворять нечего: масса верхнего газа постоянна, температура постоянна, давление $P = P_0V_0/V_в$ (закон Бойля — Мариотта для верхней порции). Объём $V_в$ при $t < t_1$ растёт, а после t_1 вода начинает поднимать поршень и $V_в$ убывает. Давление минимально при максимальном $V_в$, то есть в момент $t_1 \approx 1250$ с (рис. 2, 3).

Пункт 3. Максимальный объём верхней части — значение (4) при

$t = t_1$:

$$V_{\text{в max}} = V_0 + \frac{qt_1}{2}(a-1) = 2V_0\,\frac{a}{a+1} \approx 8{,}2 \text{ л}.$$

По закону Бойля — Мариотта

$$P_{\min} = \frac{P_0 V_0}{V_{\text{в max}}} = P_0\,\frac{a+1}{2a} \approx 164 \text{ кПа} \cdot 0{,}805 \approx 132 \text{ кПа}.$$

Пункт 4. После момента t_1 нижняя часть заполнена водой, и верхний объём $V_{\text{в}} = 2V_0 - qt$. Насос выключается при $P = P_{\text{кр}}$, тогда по закону Бойля — Мариотта

$$V_{\text{в,кр}} = \frac{P_0 V_0}{P_{\text{кр}}} = \frac{164 \cdot 6{,}6}{410} \text{ л} = \frac{2V_0}{5} = 2{,}64 \text{ л}.$$

Остальное занимает вода: $qt_2 = 2V_0 - V_{\text{в,кр}} = \dfrac{8V_0}{5}$, откуда

$$t_2 = \frac{8V_0}{5q} = \frac{8 \cdot 6{,}6 \text{ л}}{5 \cdot 0{,}004 \text{ л/с}} = 2640 \text{ с}.$$

Пункт 5. До t_1 объём $V_{\text{в}}(t)$ растёт линейно по формуле (4), после t_1 убывает линейно: $V_{\text{в}} = 2V_0 - qt$. Это ломаная из двух отрезков с вершинами в точках (0; 6,6 л), (1250 с; 8,2 л) и (2640 с; 2,64 л) (рис. 2). На том же рисунке пунктиром показан объём V_1 газа под поршнем, он обращается в нуль в точке излома. Для наглядности на рис. 3 построено и давление верхнего газа: $P = P_0 V_0 / V_{\text{в}}$, минимум 132 кПа в t_1 и конец при 410 кПа.

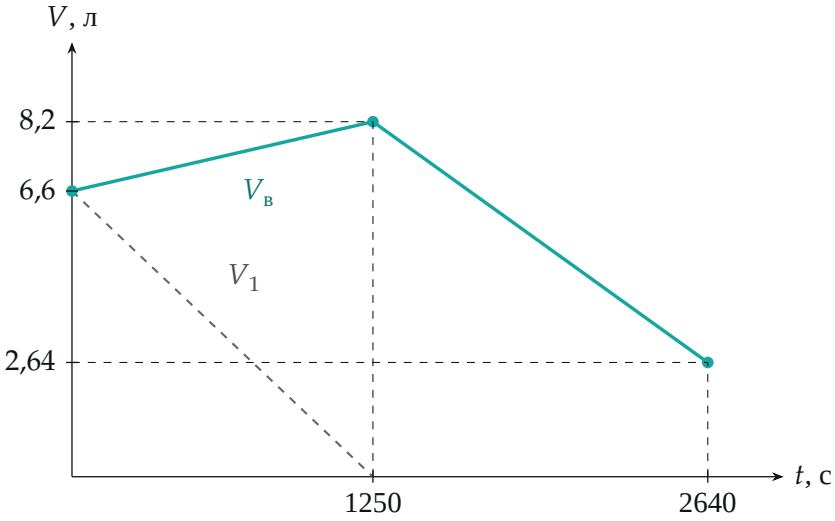


Рис. 2. Объём газа в верхней части $V_в(t)$ (бирюзовая ломаная) и объём газа под поршнем $V_1(t)$ (пунктир)

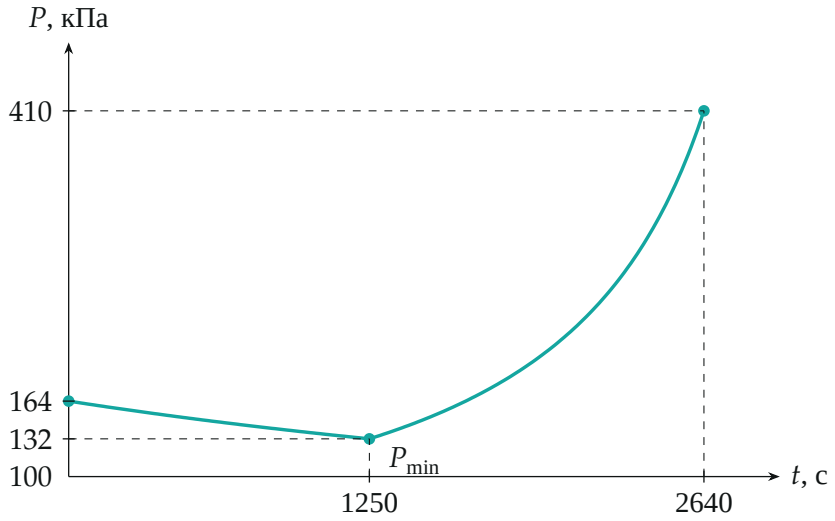


Рис. 3. Давление верхнего газа $P(t) = P_0V_0/V_в(t)$: минимум при t_1, насос выключается при $P_{кр} = 410$ кПа (ось P начинается со 100 кПа)

Проверка. Размерность: a безразмерно (k в кг/(Па · м^3), RT_0/M в Па·м^3/кг), t_1 в секундах. Предельные случаи для $P_{\min} = P_0(a+1)/(2a)$:

при $a = 1$ получаем $P_{\min} = P_0$ — растворение точно компенсирует вытеснение, поршень стоит ($v = 0$ в пункте 1); при $a \to \infty$ нижний газ мгновенно уходит в воду, и $P_{\min} \to P_0/2$ — верхний газ расширяется вдвое. Второй способ, баланс массы в момент t_1: в воде объёмом $qt_1 = 5{,}0$ л при $P_{\min}$ растворено $kP_{\min}qt_1 \approx 3{,}17 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}32 \cdot 10^5 \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-3} \approx 0{,}0209$ кг, а нижний газ в начале имел массу $P_0V_0M/(RT_0) \approx 0{,}0209$ кг — растворился весь.

Ответ. 1) вниз, $v = q(a-1)/(2S) \approx 0{,}01$ см/с, где $a = kRT_0/M \approx 1{,}64$; 2) $t_1 = 2V_0/[q(a+1)] \approx 1250$ с; 3) $P_{\min} = P_0(a+1)/(2a) \approx 132$ кПа; 4) $t_2 = 8V_0/(5q) = 2640$ с; 5) ломаная через точки (0; 6,6 л), (1250 с; 8,2 л), (2640 с; 2,64 л).