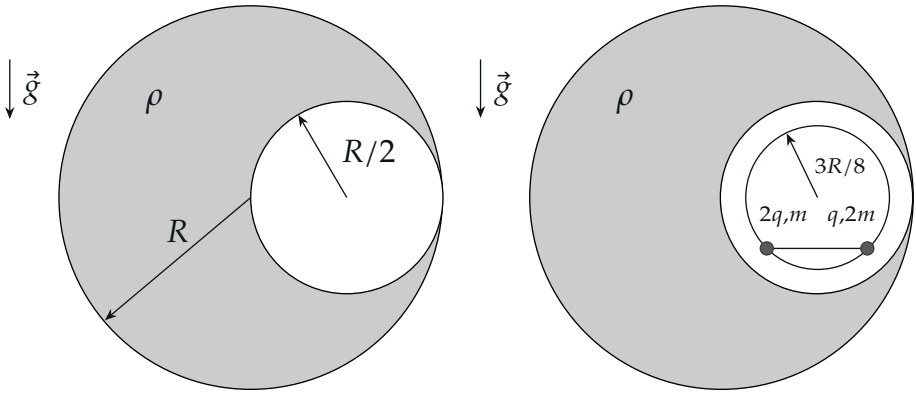
Гантель в полости

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, 10 класс, задача 4] В равномерно заряженном по объёму очень длинном непроводящем цилиндре радиусом R высверлили цилиндрическую полость радиусом $R/2$. Ось полости параллельна оси цилиндра, расстояние между осями равно $R/2$. Цилиндр закреплён в поле тяжести так, что плоскость, проходящая через оси цилиндра и полости, горизонтальна (рис. а). Известно, что небольшой шарик массой m, заряженный зарядом q того же знака, что и заряд цилиндра, отпущенный из точки на оси полости без начальной скорости, столкнётся со стенкой полости через время $\tau = \sqrt{\sqrt{2}R/(2g)}$, где g — ускорение свободного падения.



(а) (б)

1. Определите объёмную плотность заряда цилиндра ρ.

В полости цилиндра в вертикальной плоскости закрепляют гладкое непроводящее кольцо радиусом $3R/8$, так что центр кольца лежит на оси полости. На кольцо надевают две маленькие бусинки и шарнирно соединяют их лёгким стержнем длиной $3\sqrt{2}R/8$. Заряды и массы бусинок равны $2q, m$ и $q, 2m$ соответственно. Систему из бусинок и стержня удерживают так, что стержень горизонтален (рис. б). Систему отпускают, и она начинает двигаться без трения по кольцу.

2. Определите максимальную скорость бусинок в процессе их движения.

3. Определите силу, с которой стержень действует на бусинку в момент, когда скорость бусинок максимальна.

4. Определите силы, с которыми каждая из бусинок действует на кольцо в момент, когда скорость бусинок максимальна.

Кольцо находится вдали от торцов цилиндра.

▲ **Решение. Что происходит.** Электрическое поле внутри полости оказывается *однородным*: полость можно представить как сумму сплошного цилиндра с плотностью ρ и цилиндра с плотностью $-\rho$, а поле каждого из них внутри линейно растёт с расстоянием от оси, и при сложении переменные части сокращаются. Значит, заряженное тело в полости движется как в однородной силе тяжести, к которой добавлена ещё одна постоянная сила. Из движения шарика находим эту силу, а с ней — плотность ρ. Для бусинок все внешние силы тоже постоянны, поэтому скорость находим из теоремы об изменении кинетической энергии, а силы реакции — из второго закона Ньютона в момент максимальной скорости, когда тангенциальное ускорение равно нулю.

Обозначения. O — след оси цилиндра, O' — след оси полости, $\vec{d} = \overrightarrow{OO'}$ ($d = R/2$, вектор направлен горизонтально вправо). Радиус кольца $r = 3R/8$. Ось x — вправо, ось y — вверх, обе в плоскости рисунка, начало — в O'.

Пункт 1.

1. Поле сплошного цилиндра. Цилиндр очень длинный, поэтому поле на расстоянии r от оси направлено по радиусу и зависит только от r. Применим теорему Гаусса к коаксиальному цилиндру радиуса r и длины l внутри заряженной области:

$$2\pi r l\, E(r) = \frac{\pi r^2 l \rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\,\vec{r},$$

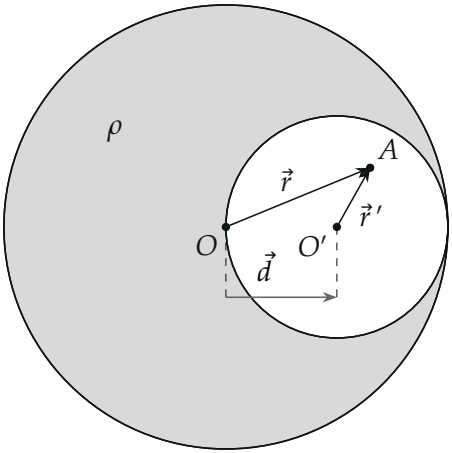
где $\vec{r}$ — радиус-вектор от оси.

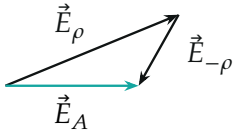
2. Поле в полости. Представим полость как сумму двух сплошных цилиндров радиуса $R/2$: плотность ρ (его добавление заполняет вырез

до целого цилиндра радиуса R) и плотность $-\rho$ с осью O'. В точке A внутри полости, где $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{r}\,' = \overrightarrow{O'A}$, по принципу суперпозиции

$$\vec{E}_A = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r} + \frac{-\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}\,' = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\,(\vec{r} - \vec{r}\,') = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\,\vec{d}.$$

Поле не зависит от положения точки A: однородное, направлено горизонтально вправо, модуль $E_\text{п} = \dfrac{\rho R}{4\varepsilon_0}$ (рис. 1).





сложение полей в точке A

Рис. 1. Поле в полости: $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{d}$, поэтому сумма полей $\vec{E}_\rho$ и $\vec{E}_{-\rho}$ равна $\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{d}$ в любой точке A

3. Шарик в полости. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ вниз и электрическая сила $q\vec{E}_\text{п}$ вправо (заряды цилиндра и шарика одного знака). Обе силы постоянны, поэтому шарик, отпущенный из покоя, движется по прямой с ускорением $a = \sqrt{g^2 + (qE_\text{п}/m)^2}$ (рис. 2). До стенки полости из её центра в любом направлении расстояние $R/2$, поэтому

$$\frac{R}{2} = \frac{a\tau^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{R}{\tau^2} = \frac{2g}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,g.$$

Отсюда $(qE_{\text{п}}/m)^2 = a^2 - g^2 = g^2$, то есть $qE_{\text{п}} = mg$:

$$\frac{q\rho R}{4\varepsilon_0} = mg \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{4\varepsilon_0 mg}{qR}. \tag{1}$$

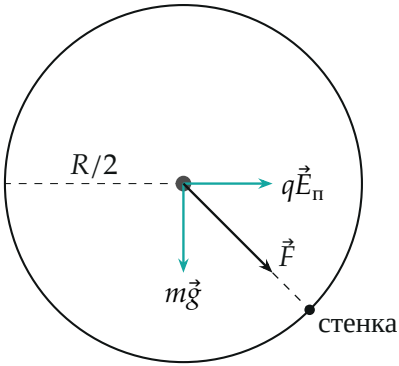


Рис. 2. Шарик в полости: $m\vec{g}$ и $q\vec{E}_{\text{п}}$ перпендикулярны и равны по модулю (в (1)), шарик идёт под углом 45° вниз-вправо

Пункт 2.

1. Силы на бусинки. Из (1) электрическая сила на заряд q равна $qE_{\text{п}} = mg$. Бусинка $(2q, m)$ испытывает силу тяжести mg вниз и электрическую $2mg$ вправо, бусинка $(q, 2m)$ — $2mg$ вниз и mg вправо (рис. 3). Кулоновская сила между бусинками, реакция стержня и нормальные реакции кольца работы не совершают: первые две — внутренние силы жёсткой системы (расстояние между бусинками не меняется), нормальная реакция перпендикулярна скорости.

2. Кинематика. Хорда длиной $\sqrt{2}\,r$ стягивает дугу в 90°. Расстояние между бусинками постоянно, значит, система поворачивается вокруг O' как целое, скорости бусинок одинаковы по модулю. Пусть φ — угол поворота системы против часовой стрелки от начального положения; бусинки в положениях $\varphi - 135°$ и $\varphi - 45°$ (отсчёт от оси x).

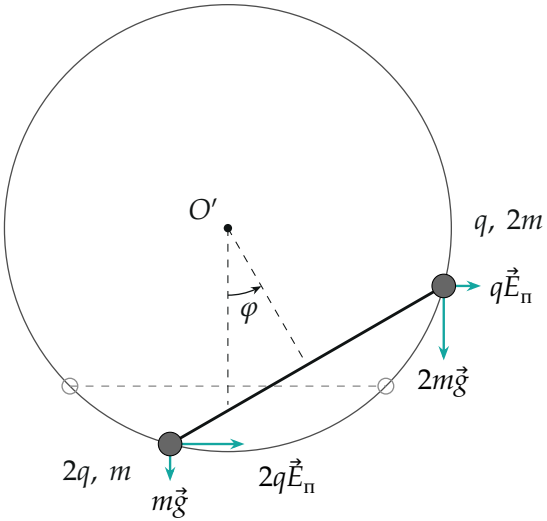


Рис. 3. Система в промежуточном положении (повёрнута на угол φ против часовой стрелки; серым — начальное) и внешние силы на бусинки

3. Момент сил и положение максимальной скорости. Запишем момент всех внешних сил относительно O' через координаты бусинок $(r\sin(\varphi-\frac{\pi}{4}),\,-r\cos(\varphi-\frac{\pi}{4}))$ и $(r\sin(\varphi+\frac{\pi}{4}),\,-r\cos(\varphi+\frac{\pi}{4}))$:

$$M=\sum(xF_y-yF_x)$$
$$=mgr[-\sin(\varphi-\tfrac{\pi}{4})+2\cos(\varphi-\tfrac{\pi}{4})-2\sin(\varphi+\tfrac{\pi}{4})+\cos(\varphi+\tfrac{\pi}{4})].$$

Так как $\varphi+\frac{\pi}{4}=(\varphi-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{2}$, второй косинус и синус заменяются: $\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})=\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})$, $\cos(\varphi+\frac{\pi}{4})=-\sin(\varphi-\frac{\pi}{4})$, и всё сокращается до

$$M(\varphi)=-2mgr\,\sin\Big(\varphi-\frac{\pi}{4}\Big).$$

В начале $M(0)=\sqrt{2}\,mgr>0$ — система раскручивается против часовой стрелки; момент меняет знак при $\varphi_*=\pi/4$, значит, скорость максимальна именно там (рис. 4).

4. Работа и скорость. При повороте на малый угол $d\varphi$ элементарная

работа внешних сил равна $dA = M\,d\varphi$. Просуммируем от 0 до φ:

$$A(\varphi) = \int_0^{\varphi} M\,d\varphi = 2mgr\Big[\cos\Big(\varphi - \frac{\pi}{4}\Big) - \cos\frac{\pi}{4}\Big] = mgr\Big[2\cos\Big(\varphi - \frac{\pi}{4}\Big) - \sqrt{2}\Big].$$

Максимум при $\varphi_* = \pi/4$: $A_{\max} = (2-\sqrt{2})\,mgr$. Теорема об изменении кинетической энергии для обеих бусинок (масса $m+2m = 3m$, скорости одинаковы) даёт

$$\frac{3mv_{\max}^2}{2} = (2-\sqrt{2})\,mgr \quad\Rightarrow\quad v_{\max} = \sqrt{\frac{2(2-\sqrt{2})gr}{3}} = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})\,gR}}{2}.$$

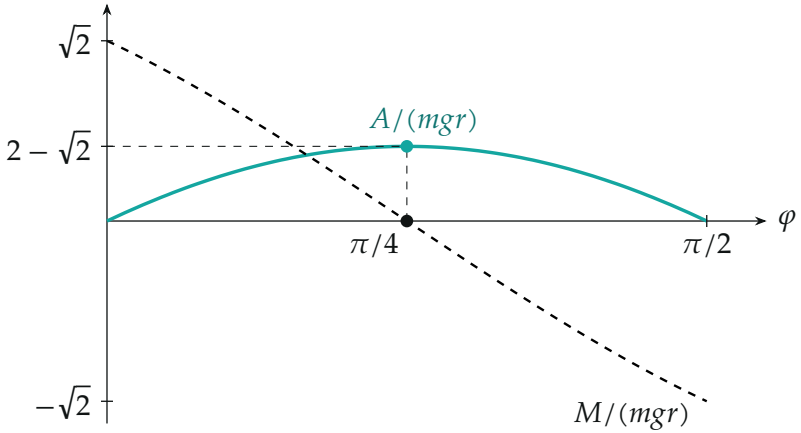


Рис. 4. Момент внешних сил $M(\varphi)$ и их работа $A(\varphi)$: работа максимальна там, где момент равен нулю

Пункт 3.

1. Положение. При $\varphi_* = \pi/4$ бусинка $(2q, m)$ внизу кольца, бусинка $(q, 2m)$ справа от центра; стержень составляет с вертикалью угол 45° (рис. 5). В этот момент скорость максимальна, поэтому тангенциальное ускорение обеих бусинок равно нулю.

2. Сила вдоль стержня. На каждую бусинку вдоль хорды действует сумма $\vec{T} + \vec{F}_{\text{кул}}$ силы стержня и кулоновского отталкивания (направлена

от соседней бусинки; T — сила стержня, положительная при сжатии). Запишем второй закон Ньютона для нижней бусинки в проекции на касательную (горизонтальную) ось, ускорение равно нулю:

$$0 = 2qE_{\text{п}} - (T + F_{\text{кул}})\cos 45^\circ \quad \Rightarrow \quad T + F_{\text{кул}} = 2\sqrt{2}\,mg.$$

Для правой бусинки в проекции на вертикаль: $0 = -2mg + (T + F_{\text{кул}})\sin 45^\circ$ — тот же результат, значит, силы согласованы.

3. Кулоновская сила и ответ. Расстояние между бусинками $L = 3\sqrt{2}R/8$, $L^2 = 9R^2/32$:

$$F_{\text{кул}} = \frac{2q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 L^2} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 L^2} = \frac{16q^2}{9\pi\varepsilon_0 R^2}, \qquad T = 2\sqrt{2}\,mg - \frac{16q^2}{9\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Знак T: при $T > 0$ стержень распирает бусинки (сжат), при $T < 0$ — стягивает (растянут).

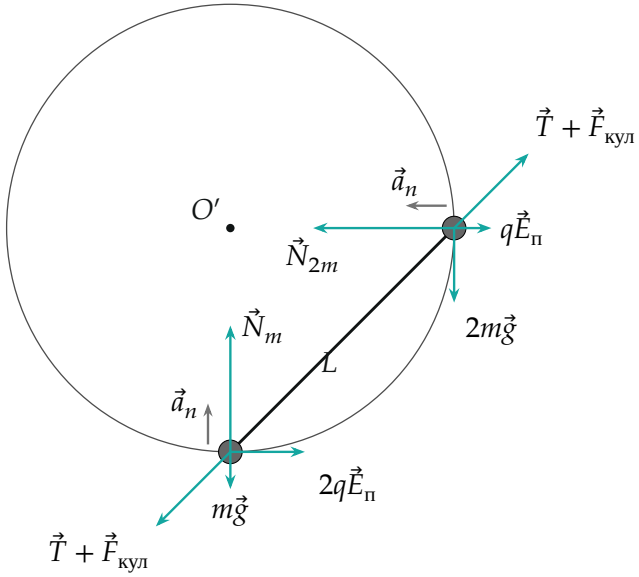


Рис. 5. Силы на бусинки при максимальной скорости; $\vec{a}_n$ — центростремительное ускорение

Пункт 4.

1. Центростремительное ускорение. $a_n = v_{\max}^2/r = \dfrac{2(2-\sqrt{2})}{3}\,g$.

2. Радиальные уравнения. Нормальные реакции N_m и N_{2m} направлены к центру O': для нижней бусинки это вверх, для правой — влево. Сила вдоль стержня на нижнюю бусинку направлена вниз-влево, на правую — вверх-вправо, её проекция на радиус по модулю равна $(T + F_{\text{кул}})\cos 45^\circ = 2mg$ и направлена *от* центра. Сила тяжести mg (на нижнюю) и электрическая $qE_{\text{п}} = mg$ (на правую) тоже направлены от центра. Второй закон Ньютона в проекции на радиус:

$$ma_n = N_m - mg - 2mg,$$
$$2ma_n = N_{2m} - mg - 2mg.$$

Отсюда

$$N_m = 3mg + ma_n = mg\,\frac{13-2\sqrt{2}}{3} \approx 3{,}39\,mg,$$
$$N_{2m} = 3mg + 2ma_n = mg\,\frac{17-4\sqrt{2}}{3} \approx 3{,}78\,mg.$$

По третьему закону Ньютона бусинки действуют на кольцо с такими же по модулю силами, направленными от центра: бусинка $(2q, m)$ — вниз, бусинка $(q, 2m)$ — вправо. Обратите внимание: T и $F_{\text{кул}}$ по отдельности в радиальные уравнения не входят, только сумма $2\sqrt{2}\,mg$, уже найденная из тангенциального уравнения.

Проверка. Размерности: $v \sim \sqrt{gR}$, силы $\sim mg$, $q^2/(\varepsilon_0 R^2)$ — сила. Второй способ для скорости — работа по перемещениям. Нижняя бусинка опускается на $r(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$ и смещается вправо на $r/\sqrt{2}$, правая — поднимается на $r/\sqrt{2}$ и смещается вправо на $r(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$. Сумма работ $[mgr(1-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 2mg\frac{r}{\sqrt{2}}] + [-2mg\frac{r}{\sqrt{2}} + mgr(1-\frac{1}{\sqrt{2}})]$ равна $(2-\sqrt{2})\,mgr$, как и в интеграле. При $\varphi = \pi/2$ работа снова нуль — система качается между $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$.

Ответ. 1) $\rho = \dfrac{4\varepsilon_0 mg}{qR}$; 2) $v_{\max} = \dfrac{\sqrt{(2-\sqrt{2})\,gR}}{2}$; 3) $T = 2\sqrt{2}\,mg - \dfrac{16q^2}{9\pi\varepsilon_0 R^2}$ (вдоль стержня; $T > 0$ — сжатие); 4) бусинка $(2q, m)$ давит на кольцо с силой $N_m = mg\,\dfrac{13-2\sqrt{2}}{3} \approx 3{,}39\,mg$ (вниз), бусинка $(q, 2m)$ — $N_{2m} = mg\,\dfrac{17-4\sqrt{2}}{3} \approx 3{,}78\,mg$ (вправо).