Термистор, лазер и диод

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, 10 класс, задача 5] Десятиклассник Паша, познакомившись на прошедшем региональном этапе со свойствами термистора, решил собрать электрическую цепь, состоящую из источника, ЭДС которого можно регулировать, резистора сопротивлением $r = 40$ Ом, а также соединённых между собой параллельно диода и термистора (см. рис. 1). ЭДС источника можно изменять в пределах от 0 В до некоторого достаточного большого значения $\mathcal{E}_{max}$.

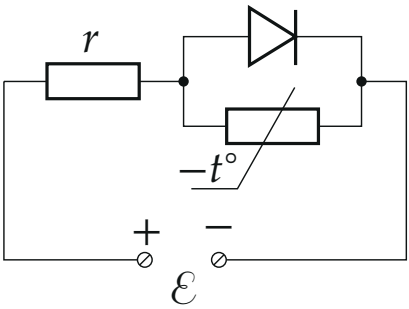

Рис. 1

Паше известно, что вольт-амперная характеристика диода имеет вид, представленный на рис. 2, а температурная зависимость сопротивления термистора задаётся формулой

$$R(t) = R_0/(1 + \alpha(t - t_0))^2,$$

где $R_0 = 60$ Ом — сопротивление термистора при комнатной температуре t_0 (значение константы α мальчик не нашёл). Включив источник и медленно увеличивая его ЭДС, Паша обнаружил, что диод открывается при ЭДС источника $\mathcal{E}_1 = 5$ В.

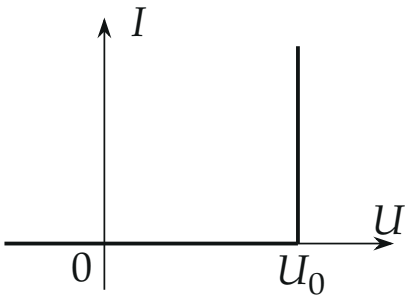

Рис. 2

1. Продолжая свои эксперименты, Паша взял мощный лазер и стал светить им прямо на термистор. Оказалось, что диод при этом закрылся и, более того, никакие изменения ЭДС источника не приводили к его открытию! Определите минимальную тепловую мощность P, передаваемую при этом от лазера термистору.
2. Выключив лазер, Паша обнаружил, что диод остался закрытым, несмотря на то, что ЭДС источника была близка к $\mathcal{E}_{max}$. Удивившись, мальчик стал плавно уменьшать ЭДС. При каком максимальном значении ЭДС источника $\mathcal{E}_2$ диод снова откроется?

Напряжение на открытом диоде равно $U_0 = 2$ В. Теплоёмкостью термистора и внутренним сопротивлением источника можно пренебречь. Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Термистор во всех экспериментах находится в воздухе, имеющем температуру t_0, не контактируя с другими предметами.

▲ **Решение. Что происходит.** Пока диод закрыт, весь ток идёт через резистор r и термистор. Ток нагревает термистор, а нагрев уменьшает его сопротивление, поэтому напряжение на термисторе при росте тока сначала растёт, а потом, когда сопротивление падает быстрее, чем растёт ток, *уменьшается*: у зависимости U от нагрева есть максимум. Диод открывается в тот момент, когда напряжение на термисторе достигает U_0. Лазер добавляет к нагреву мощность P и понижает этот максимум: если максимум ниже U_0, диод не откроется ни при какой ЭДС. Без лазера при

той же ЭДС возможны два состояния: диод открыт, термистор «прижат» к U_0 и тёплый, либо диод закрыт, а термистор сильно нагрет, и $U < U_0$. Лазер переводит термистор во второе состояние, где он остаётся и после выключения.

Обозначения. $x = \alpha(t - t_0)$ — безразмерный нагрев термистора, тогда $R = R_0/(1 + x)^2$. Коэффициент в законе теплоотдачи k входит только в комбинации $\kappa = k/\alpha$ (в ваттах): мощность тепловых потерь $k(t - t_0) = \kappa x$. Ток через резистор и термистор I, напряжение на термисторе U, диод закрыт: ток через него нулевой (рис. 3).

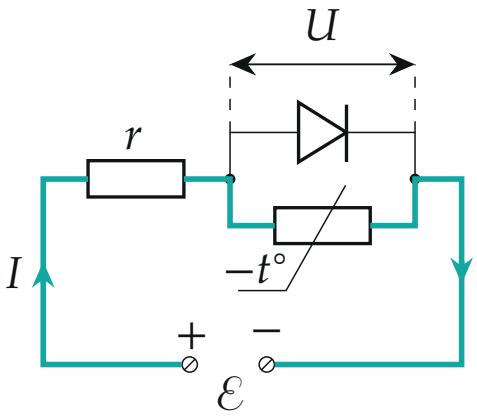

Рис. 3. Диод закрыт, ток I идёт через резистор r и термистор; U — напряжение на термисторе и диоде

1. Состояние при открытии диода. В момент открытия $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$ напряжение на диоде и термисторе равно U_0, а ток диода ещё равен нулю. Закон Ома для резистора r и для термистора:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - U_0}{r} = \frac{U_0}{R} = \frac{U_0(1 + x_1)^2}{R_0}.$$

Отсюда

$$(1 + x_1)^2 = \frac{R_0(\mathcal{E}_1 - U_0)}{rU_0} = \frac{60 \cdot 3}{40 \cdot 2} = 2{,}25 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0{,}5.$$

2. Теплоотдача. Тепловая мощность U_0^2/R, выделяющаяся на термисторе, в установившемся режиме равна мощности потерь в воздух:

$$\frac{U_0^2}{R_0}(1+x_1)^2 = \kappa x_1 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{U_0^2(1+x_1)^2}{R_0 x_1} = \frac{4 \cdot 2{,}25}{60 \cdot 0{,}5}\ \text{Вт} = 0{,}3\ \text{Вт}.$$

3. Баланс мощностей при лазере. Пусть лазер передаёт термистору мощность P, диод закрыт, напряжение на термисторе U. В установившемся режиме мощность нагрева током плюс мощность лазера равна мощности потерь:

$$\frac{U^2}{R_0}(1+x)^2 + P = \kappa x \quad \Rightarrow \quad U^2 = R_0\,\frac{\kappa x - P}{(1+x)^2}. \qquad (1)$$

Введём $s = P/\kappa$ (мощность лазера в единицах κ), тогда $U^2 = R_0\kappa\,\dfrac{x-s}{(1+x)^2}$. Эта зависимость нарисована на рис. 4 для трёх мощностей.

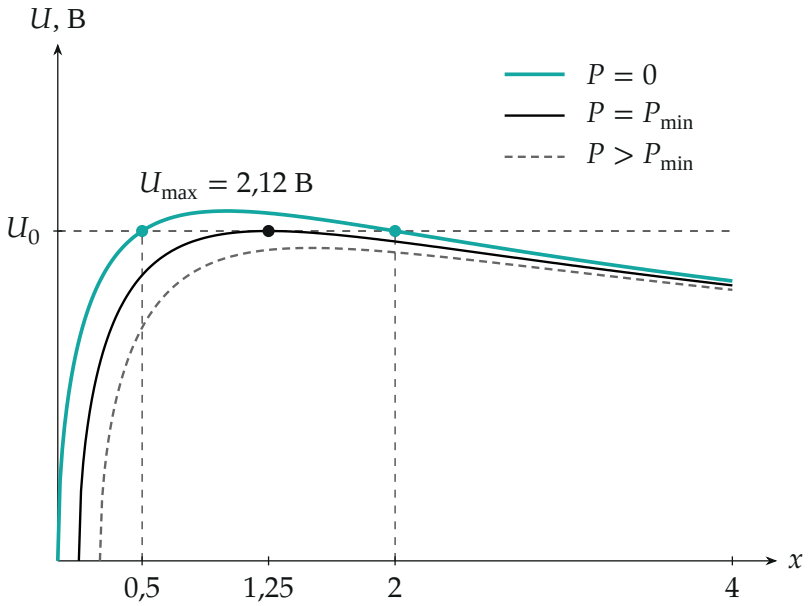

Рис. 4. Напряжение на термисторе $U(x)$ по формуле (1): при $P = 0$ мак-

симум 2,12 В выше $U_0 = 2$ В (две точки пересечения: $x = 0{,}5$ и $x = 2$), при $P = P_{\min}$ максимум в точности равен U_0, при большей мощности лежит ниже

Пункт 1.

4. Максимум напряжения. Положим $z = x - s > 0$, тогда $1 + x = 1 + s + z$ и

$$U^2 = \frac{R_0 \kappa z}{(1+s+z)^2} = \frac{R_0\kappa}{\left(\dfrac{1+s}{\sqrt{z}} + \sqrt{z}\right)^2}.$$

Сумма двух положительных слагаемых $\frac{1+s}{\sqrt{z}} + \sqrt{z} \geq 2\sqrt{1+s}$ (неравенство о средних), равенство при $z = 1+s$, то есть при $x = 1+2s$. Поэтому

$$U_{\max}^2 = \frac{R_0\kappa}{4(1+s)}.$$

5. Условие задачи. Диод не откроется ни при какой ЭДС, если даже наибольшее возможное напряжение на термисторе не превышает U_0: $U_{\max} \leq U_0$. Отсюда

$$\frac{R_0\kappa}{4(1+s)} \leq U_0^2 \quad \Rightarrow \quad s \geq \frac{R_0\kappa}{4U_0^2} - 1 = \frac{60 \cdot 0{,}3}{16} - 1 = 0{,}125.$$

Минимальная мощность лазера:

$$P = \kappa s = 0{,}3 \cdot 0{,}125 \text{ Вт} = 37{,}5 \text{ мВт}.$$

Обратите внимание: ЭДС источника не поднимет напряжение на термисторе выше $U_{\max}$: при росте тока термистор нагревается так сильно, что его сопротивление падает быстрее, чем растёт ток, и U после максимума убывает.

Пункт 2.

6. Без лазера. При $P = 0$ уравнение (1) принимает вид $U^2 = R_0\kappa x/(1+x)^2$. Диод откроется, когда U достигнет U_0:

$$\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{U_0^2}{R_0\kappa} = \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \text{ или } x = 2.$$

Первый корень — уже найденный $x_1 = 0{,}5$ (диод открывается при увеличении ЭДС от нуля). Второй, $x_2 = 2$, соответствует сильно нагретому термистору: при $x > 1$ напряжение на нём убывает с ростом нагрева (рис. 4, правая ветвь).

7. Почему диод остался закрытым. После выключения лазера термистор остаётся на «горячей» ветке: при ЭДС, близкой к $\mathcal{E}_{max}$, ток большой, термистор сильно нагрет ($x \gg 2$), его сопротивление мало и $U < U_0$. Закрытому диоду в каждый момент соответствует одно состояние термистора: для данного тока I из баланса $I^2R_0/(1+x)^2 = \kappa x$ нагрев x находится однозначно, а ЭДС $\mathcal{E} = U + Ir$ растёт с током (рис. 5, 6). Поэтому при медленном уменьшении ЭДС состояние скользит вниз по горячей ветке: ток и нагрев уменьшаются, а U растёт.

8. Момент открытия. Диод откроется впервые, когда на горячей ветке U достигнет U_0, то есть при $x_2 = 2$. Ток тогда

$$I_2 = \frac{U_0(1+x_2)^2}{R_0} = \frac{2 \cdot 9}{60}\ \text{А} = 0{,}3\ \text{А},$$

а ЭДС по закону Ома для резистора и термистора

$$\mathcal{E}_2 = I_2 r + U_0 = 0{,}3 \cdot 40 + 2 = 14\ \text{В}.$$

Обратите внимание: $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$: диод открывается при уменьшении ЭДС раньше, чем при её увеличении, — потому что термистор был нагрет лазером.

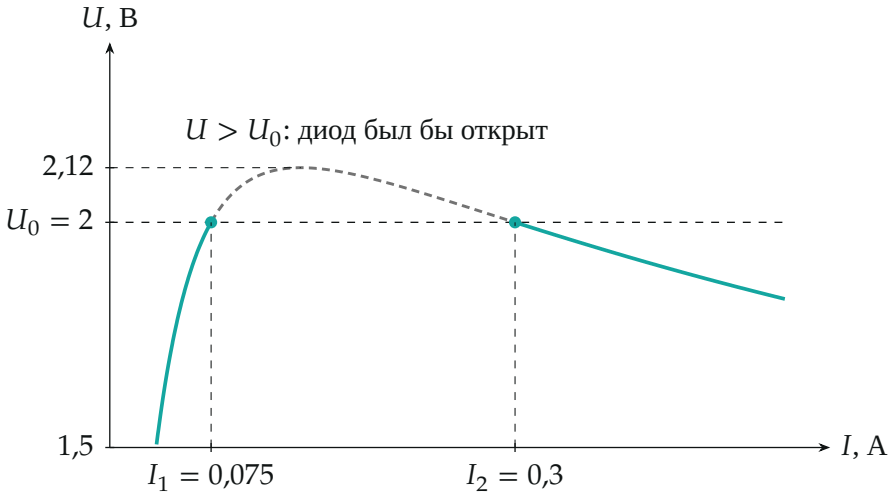

Рис. 5. Вольт-амперная характеристика термистора (при закрытом диоде, $P = 0$): U достигает U_0 в точках $I_1 = 0{,}075$ А и $I_2 = 0{,}3$ А; между ними $U > U_0$ (ось U начинается с 1,5 В)

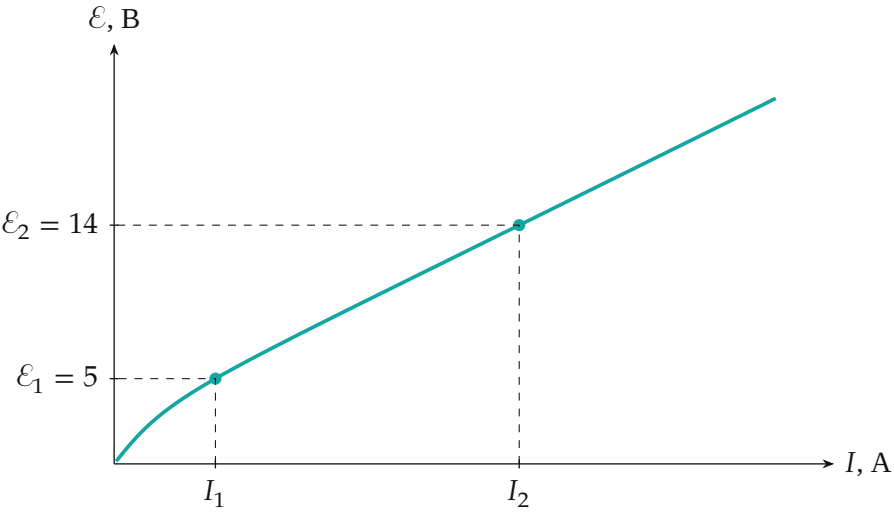

Рис. 6. ЭДС источника как функция тока при закрытом диоде: монотонная кривая, точки $\mathcal{E}_1 = 5$ В (I_1, диод открывается при росте ЭДС от нуля) и $\mathcal{E}_2 = 14$ В (I_2, диод открывается при уменьшении ЭДС с большого значения)

Проверка. Размерности: $\kappa = U_0^2(1+x)^2/(R_0 x)$ — вольты в квадрате на омы, то есть ватты; $\mathcal{E}_2 = Ir + U_0$ — вольты. Второй способ для пункта 2: подставим $x_2 = 2$ в формулу (1) при $P = 0$: $U^2 = 60{\cdot}0{,}3{\cdot}2/9 = 4\ \text{В}^2$, $U = 2\ \text{В} = U_0$ — верно. Для пункта 1: при $P = 37{,}5$ мВт максимум $U_{\max}^2 = 18/(4 \cdot 1{,}125) = 4\ \text{В}^2$, то есть кривая ровно касается уровня U_0 в точке $x = 1 + 2s = 1{,}25$ (рис. 4), а при меньшей мощности максимум поднимается выше U_0. Физический смысл: лазер должен подогреть термистор настолько, чтобы его сопротивление никогда не давало на нём 2 В; после выключения лазера он «помнит» нагрев, пока ЭДС не снизится до 14 В.

Ответ. 1) $P = \kappa\left(\dfrac{R_0\kappa}{4U_0^2} - 1\right) = 37{,}5$ мВт, где $\kappa = k/\alpha = 0{,}3$ Вт; 2) $\mathcal{E}_2 = 14$ В.