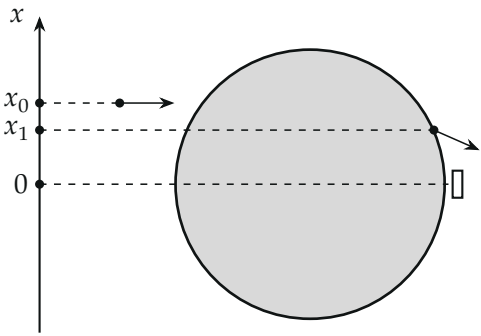
Выбоина

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, заключительный этап, 11 класс, теоретический тур, задача 1] Экспериментатор Глюк решил научиться играть в настольную игру — аэрохоккей. Для этого он купил всё необходимое оборудование и начал тренироваться. Однако, к своему удивлению, обнаружил, что нередко после запуска шайбы траектория отличается от прямолинейной.

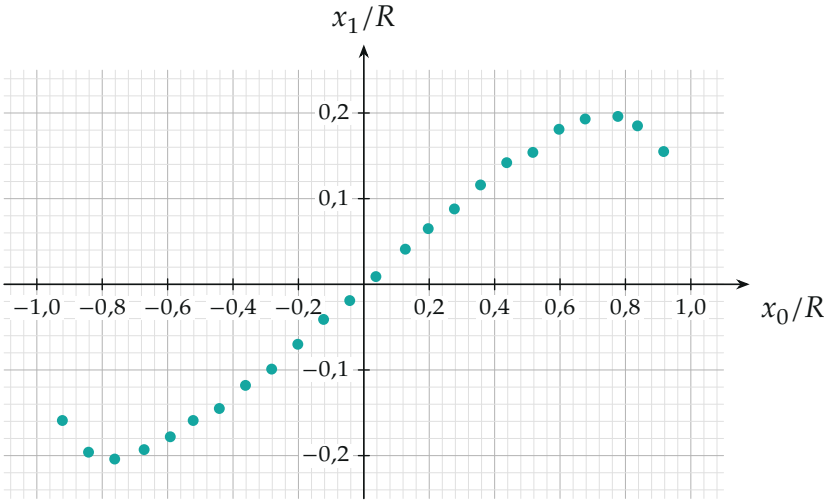
Глюк решил проверить, в чём дело, и обнаружил деформацию горизонтальной поверхности игрового поля: на одном из её участков было круглое осесимметричное углубление (выбоина) радиусом R с гладкими краями и горизонтальным дном (см. рис.).



Экспериментатор решил проанализировать, как смещается шайба при прохождении через выбоину. Для этого он запускал шайбу перпендикулярно оси OX (см. рис.) из разных начальных положений с координатой x_0 и измерял координату x_1 выхода шайбы из выбоины.



В результате он получил вот такие экспериментальные точки:



Начальная скорость всех запущенных шайб v_1, ускорение свободного падения g. Трение отсутствует.

1. Определите глубину выбоины.
2. Определите, при какой глубине выбоины Глюк всегда попадал бы в ворота, запуская шайбу из точек с начальными координатами $|x_0| \ll R$.

Считайте, что проекции наклонных участков выбоины (её «стенок») на горизонтальную плоскость много меньше радиуса выбоины, а шайба никогда не отрывается от поверхности и является точечной. Место установки ворот изображено на рисунке; считайте, что их размеры малы.

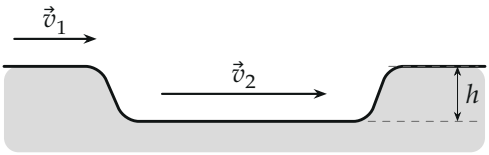
▲ **Решение. Что происходит.** Дно выбоины ниже поверхности, поэтому на стенке шайба ускоряется. Сила реакции стенки лежит в вертикальной плоскости, проходящей через ось выбоины, значит, в горизонтальной плоскости она направлена вдоль радиуса, а вдоль края (по касательной) горизонтальных сил нет. Составляющая скорости вдоль края сохраняется, а составляющая вдоль радиуса растёт, поэтому траектория ломается на краю, как луч света при входе в более плотную среду. Главная идея — «преломление шайбы» с показателем $n = v_2/v_1$. Пункт 1: показатель находим из наклона графика, глубину — из закона сохранения энергии. Пункт 2: нужна такая выбоина, которая работает как собирающая линза и фокусирует шайбы в воротах.

Обозначения. v_1 — скорость вне выбоины, v_2 — скорость на её дне, $n = v_2/v_1$, h — глубина, O — центр выбоины. Точка A — вход шайбы в выбоину, B — выход, H_1 и H_2 — проекции A и B на ось OX (через O вдоль оси проходит прямая H_1H_2). Углы α и β — между скоростью и радиусом (нормалью к краю) в точке входа вне выбоины и в ней. Стенки узкие, поэтому за время спуска шайба по горизонтали практически не смещается.

1. Закон сохранения энергии. Для шайбы между краем и дном (поле тяжести, трения нет):

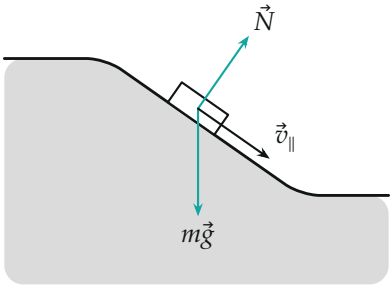
$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{n^2 - 1}{2}\,\frac{v_1^2}{g}.$$

Теперь нужно найти n.



Скорости вне выбоины и на её дне и глубина h.

2. Силы на стенке. На шайбу действуют сила тяжести и сила реакции $\vec{N}$. Выбоина осесимметрична, поэтому нормаль к стенке лежит в вертикальной плоскости, проходящей через ось, и $\vec{N}$ лежит в ней же.



Сечение вертикальной плоскостью через ось выбоины.

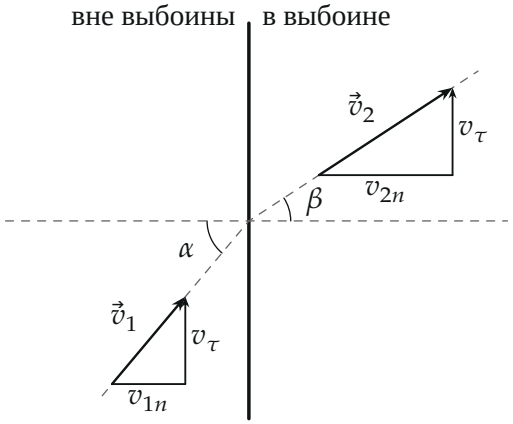
Второй закон Ньютона для шайбы в проекции на горизонтальное направление, перпендикулярное радиусу (касательное к краю): сила тяжести вертикальна, проекция $\vec{N}$ равна нулю, поэтому

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\tau = \text{const}$$

на всём спуске. Вдоль радиуса сила есть, и нормальная составляющая меняется. Обратите внимание: сохраняется не вектор скорости и не импульс шайбы, а только его проекция на направление, вдоль которого сила равна нулю.

3. Закон «преломления». Вне выбоины $v_\tau = v_1 \sin\alpha$, на дне — $v_\tau = v_2 \sin\beta$. Приравниваем:

$$v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}.$$

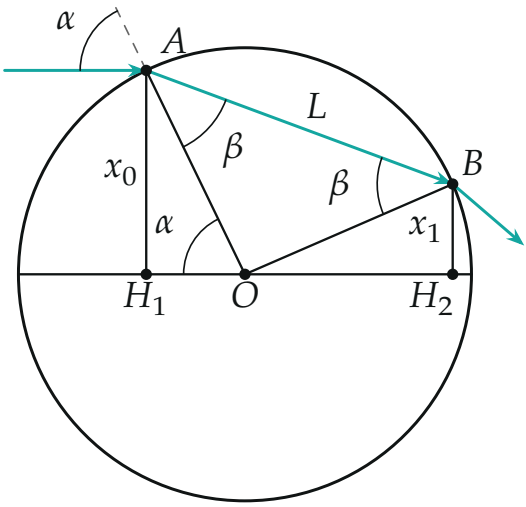


Скорости на границе: касательная составляющая v_τ одна и та же, нормальная v_n растёт.

4. Геометрия траектории. Шайба входит в выбоину в точке A на её краю и движется по хорде AB длиной L. Треугольник OAB равнобедренный ($OA = OB = R$), поэтому на выходе угол с радиусом снова равен β, а снаружи по закону из пункта 3 — снова α. Отсюда $L = 2R\cos\beta$. Из прямоугольного треугольника AOH_1 получаем $\sin\alpha = x_0/R$. Направление

шайбы при входе повернулось на $\alpha-\beta$, поэтому $x_0 - x_1 = L\sin(\alpha-\beta)$:

$$x_1 = x_0 - 2R\cos\beta\,\sin(\alpha-\beta).$$



Траектория через выбоину: на входе угол с радиусом α, внутри β; $x_0 = AH_1$, $x_1 = BH_2$.

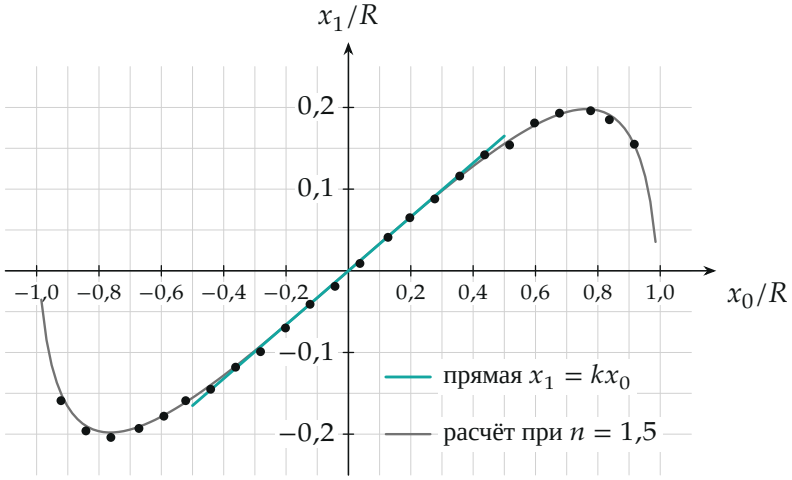
5. Малые x_0. Точный вид зависимости громоздкий, но центральная часть графика линейна: при $|x_0| \ll R$ углы малы, $\alpha \approx x_0/R$, $\beta \approx \alpha/n$, $\cos\beta \approx 1$, $\sin(\alpha-\beta) \approx \alpha(1-1/n)$. Тогда

$$x_1 \approx x_0 - 2x_0\left(1-\frac{1}{n}\right) = x_0\left(\frac{2}{n}-1\right), \qquad k = \frac{x_1}{x_0} = \frac{2}{n} - 1.$$

Обратите внимание: это приближение верно только в центре, при $|x_0| \ll R$; у краёв точки загибаются, и проводить прямую через весь график нельзя.

6. Показатель по графику. Проводим прямую через начало координат по центральным точкам $|x_0/R| \lesssim 0{,}4$. Метод наименьших квадратов по ним даёт наклон $k \approx 0{,}33$–$0{,}34$. Из $k = 2/n - 1$:

$$n = \frac{2}{1+k} \approx 1{,}5.$$



Экспериментальные точки, прямая $x_1 = kx_0$ по центру ($k \approx 0{,}33$) и расчётная кривая из пункта 4 при $n = 1{,}5$.

Подстановка $n = 1{,}5$ в точную формулу пункта 4 описывает все точки, в том числе загиб у краёв (среднее отклонение около $0{,}004R$), — это независимая проверка найденного n.

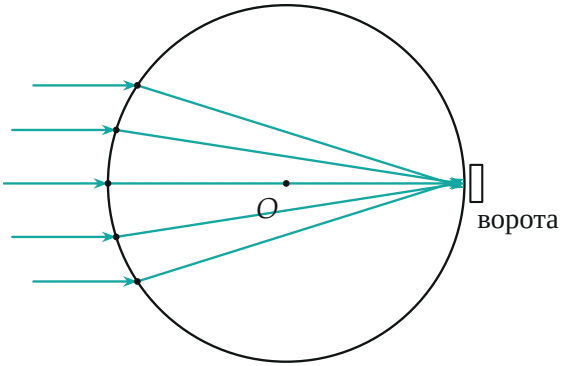
7. Глубина. Из пункта 1

$$h = \frac{n^2 - 1}{2}\,\frac{v_1^2}{g} \approx \frac{1{,}5^2 - 1}{2}\,\frac{v_1^2}{g} \approx 0{,}62\,\frac{v_1^2}{g}.$$

Точность чтения графика ($k = 0{,}33$–$0{,}34$, $n = 1{,}49$–$1{,}50$) даёт $h = (0{,}61$–$0{,}63)\,v_1^2/g$.

Пункт 2. Ворота. Ворота стоят на оси OX при $x = 0$ на краю выбоины. Шайбы из всех точек $|x_0| \ll R$ попадают в них, если $x_1 = 0$ при любом малом x_0, то есть $k = 2/n - 1 = 0$:

$$n = 2, \qquad v_2 = 2v_1, \qquad h = \frac{n^2 - 1}{2}\,\frac{v_1^2}{g} = \frac{3}{2}\,\frac{v_1^2}{g}.$$



При $n = 2$ траектории шайб, запущенных параллельно оси, сходятся в одной точке на краю выбоины, где стоят ворота.

Проверка. Размерность: v_1^2/g — длина. Второй способ для пункта 2: выбоина действует как стеклянный шар с показателем преломления n, а для шара фокус параллельного пучка находится на расстоянии $f = \dfrac{nR}{2(n-1)}$ от центра; при $n = 2$ получаем $f = R$ — заднюю точку края, где ворота. Численно при $n = 2$ шайба с $x_0 = 0{,}5R$ выходит в точку $x_1 \approx -0{,}02R$, то есть фокусировка хороша и не только при очень малых x_0. Предел $n \to 1$ ($h \to 0$): $k \to 1$, $x_1 = x_0$, шайба идёт прямо.

Смысл: выбоина — линза для шайб, и глубина подобрана так, чтобы фокус попал в ворота.

Ответ. 1) $h = \dfrac{n^2-1}{2}\dfrac{v_1^2}{g}$ при $n = \dfrac{2}{1+k} \approx 1{,}5$, то есть $h \approx 0{,}62\,v_1^2/g$; 2) $h = 1{,}5\,v_1^2/g$.