Молекулярка

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, заключительный этап, 11 класс, теоретический тур, задача 2] Идеальный двухатомный газ совершает циклический процесс, состоящий из четырёх последовательных участков: $1-2$, $2-3$, $3-4$ и $4-1$. Пусть p, V и n — давление, объём и концентрация газа, а p_0, V_0 и n_0 — некоторые постоянные величины, причём $n_0 V_0 = N_0$, где N_0 — неизменное число молекул газа.

Если изобразить этот цикл на диаграмме состояний в координатах p/p_0 (ордината) и V/V_0 (абсцисса), то участки $1-2$ и $3-4$ представляют собой отрезки, лежащие на прямых, проходящих через начало координат. Точка 2 имеет наибольшую ординату в цикле, а участок $4-1$ содержит точку с координатами $(1{,}1)$. Углы наклона участков $1-2$ и $3-4$ к оси абсцисс отличаются на α. Масштаб осей на графике — одинаковый.

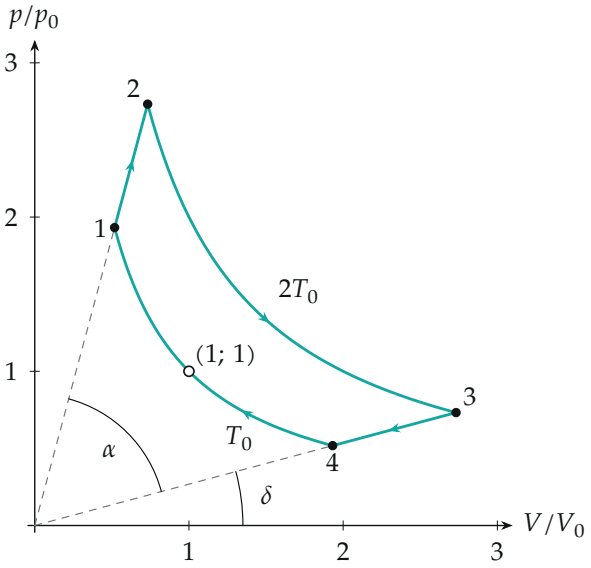
Если изобразить этот же цикл на диаграмме состояний в координатах p/p_0 (ордината) и n/n_0 (абсцисса), то теперь уже участки $2-3$ и $4-1$ представляют собой отрезки, лежащие на прямых, проходящих через начало координат. Масштаб осей на этом графике — также одинаковый.

Известно, что КПД цикла идеальной тепловой машины, построенного между максимальной и минимальной температурами, достигаемыми в ходе данного цикла, равно $\eta_K = 0{,}5$.

1. Найдите углы наклона прямых, содержащих отрезки $2-3$ и $4-1$ на диаграмме состояний в координатах $p/p_0 - n/n_0$.
2. Постройте (качественно) рассматриваемый цикл на диаграмме состояний в координатах n/n_0 (ордината) и T/T_0 (абсцисса), где T — абсолютная температура, а $p_0 = n_0 k T_0$. Отметьте на полученном графике известные точки/точку и значения.
3. Какие значения может принимать КПД данного цикла?
4. Найдите диапазон возможных КПД для значения угла $\alpha = \pi/3$.
5. Найдите диапазон возможных КПД для значения угла $\alpha = \pi/6$.

▲ **Решение. Что происходит.** Цикл состоит из двух изотерм ($2-3$ и $4-1$) и двух отрезков $p \propto V$, на которых теплоёмкость газа постоянна.

Поэтому тепло на всех участках считается явно, а КПД зависит от одного числа — логарифма отношения объёмов на изотермах. Это отношение задаёт угол наклона δ прямой $3-4$; остаётся найти, какие значения КПД возможны при допустимых δ. Главная идея: сначала найти температуры и теплоты, затем исследовать КПД как функцию δ (минимум и границы).



Цикл в координатах p/p_0, V/V_0 при $\alpha = 60°$ и $\delta = 15°$ (δ — угол наклона $3-4$).

Обозначения. ν — число молей, $T_{\min}$ и $T_{\max}$ — наименьшая и наибольшая температуры цикла, δ — угол наклона прямой $3-4$ к оси V/V_0, тогда прямая $1-2$ наклонена под углом $\delta+\alpha$ (прямая $1-2$ круче: точки 2 и 3 лежат на одной изотерме, а у точки 2 давление больше). Для краткости $t_1 = \operatorname{tg}\delta$, $t_2 = \operatorname{tg}(\delta+\alpha)$.

Пункт 1. Изотермы и их наклон.

1. Температуры участков. Из уравнения состояния $p = nkT$: при $p/n = \text{const}$ температура постоянна. В координатах (n, p) участки $2-3$ и $4-1$ — прямые через начало, то есть изотермы. На участке $1-2$ имеем $p \propto V$, поэтому $T \propto pV \propto V^2$ растёт вместе с объёмом, и точка

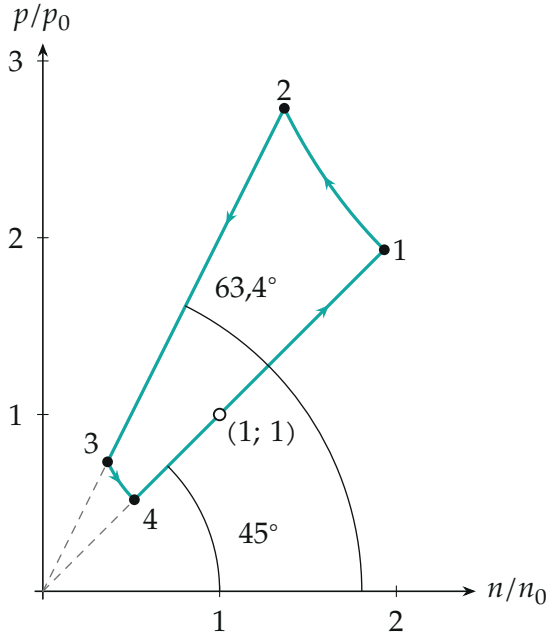
2 (больший V, больший p) горячее точки 1. Значит, изотерма $2-3$ — горячая ($T_{\max}$), $4-1$ — холодная ($T_{\min}$). Аналогично на $3-4$ температура монотонна, поэтому крайние температуры цикла достигаются именно на изотермах.

2. Температуры числами. КПД цикла Карно $\eta_K = 1 - T_{\min}/T_{\max} = 0{,}5$, откуда $T_{\max} = 2T_{\min}$. Точка $(1;1)$ лежит на изотерме $4-1$: $p_0V_0 = N_0kT_{\min}$, то есть $T_{\min} = \dfrac{p_0V_0}{N_0k} = \dfrac{p_0}{n_0k} = T_0$ и $T_{\max} = 2T_0$.

3. Наклон в координатах p/p_0 и n/n_0. Из $p = nkT$ получаем

$$\frac{p}{p_0} = \frac{n_0kT}{p_0}\cdot\frac{n}{n_0} = \frac{T}{T_0}\cdot\frac{n}{n_0}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{T}{T_0}.$$

Для $4-1$ имеем $\operatorname{tg}\beta = 1$, $\beta = 45°$; для $2-3$ — $\operatorname{tg}\beta = 2$, $\beta = \operatorname{arctg}2 \approx 63{,}4°$.



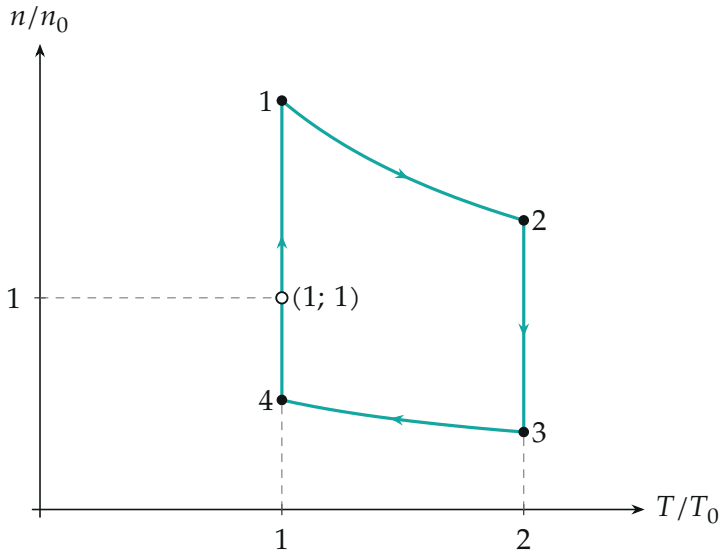
Цикл в координатах p/p_0, n/n_0: изотермы — прямые через начало с наклонами $45°$ и $63{,}4°$; участки $1-2$ и $3-4$ — гиперболы $pn = \text{const}$.

Пункт 2. Цикл в координатах n/n_0, T/T_0.

4. Участки. Изотермы — вертикальные отрезки $T/T_0 = 1$ (участок $4-1$) и $T/T_0 = 2$ (участок $2-3$). На участках $1-2$ и $3-4$ из $nV = N_0$ получаем $p/p_0 = c\,V/V_0 = c\,n_0/n$, поэтому $T/T_0 = pV/(p_0V_0) = c\,(V/V_0)^2$ и

$$\frac{n}{n_0} = \frac{V_0}{V} = \sqrt{\frac{c\,T_0}{T}} \propto T^{-1/2},$$

то есть концентрация падает с ростом температуры. Известная точка $(1;1)$ при $T/T_0 = 1$, $n/n_0 = 1$ лежит на отрезке $4-1$.



Цикл в координатах n/n_0, T/T_0 (пример $\alpha = 60°$, $\delta = 15°$): вертикальные отрезки — изотермы T_0 и $2T_0$, кривые $1-2$ и $3-4$ идут по закону $n \propto T^{-1/2}$, светлая точка — $(1;1)$.

Пункты 3–5. КПД.

5. Теплоёмкость на участках $p \propto V$. Первое начало термодинамики для малого процесса: $\delta Q = \nu C_V\,dT + p\,dV$. Из $pV = \nu RT$ и $p \propto V$ имеем $d(pV) = 2p\,dV = \nu R\,dT$, то есть $p\,dV = \frac{1}{2}\nu R\,dT$. Для двухатомного газа $C_V = \frac{5}{2}R$, поэтому

$$\delta Q = \nu\left(\tfrac{5}{2}R + \tfrac{1}{2}R\right)dT = 3\nu R\,dT.$$

Тепло на участке пропорционально изменению температуры: $Q_{1-2} = 3\nu R\,(2T_0 - T_0) = 3\nu RT_0$ получено, $Q_{3-4} = -3\nu RT_0$ отдано.

6. Объёмы в вершинах. На прямой $p/p_0 = c\,V/V_0$ температура $T/T_0 = c\,(V/V_0)^2$, откуда $V/V_0 = \sqrt{(T/T_0)/c}$. Для $3-4$ имеем $c = t_1$, для $1-2$ — $c = t_2$:

$$\frac{V_4}{V_0} = \frac{1}{\sqrt{t_1}}, \quad \frac{V_3}{V_0} = \sqrt{\frac{2}{t_1}}, \quad \frac{V_1}{V_0} = \frac{1}{\sqrt{t_2}}, \quad \frac{V_2}{V_0} = \sqrt{\frac{2}{t_2}}.$$

7. Теплоты на изотермах. При $T = \text{const}$ получаемое тепло равно работе газа $A = \nu RT\ln(V_{\text{кон}}/V_{\text{нач}})$. Введём $L = \ln\dfrac{t_2}{t_1}$:

$$Q_{2-3} = 2\nu RT_0 \ln\frac{V_3}{V_2} = \nu RT_0\,L, \qquad Q_{4-1} = \nu RT_0 \ln\frac{V_1}{V_4} = -\tfrac{1}{2}\nu RT_0\,L.$$

8. КПД. Тепло получено на участках $1-2$ и $2-3$, отдано на $3-4$ и $4-1$. Работа за цикл $A = Q_{1-2} + Q_{2-3} + Q_{3-4} + Q_{4-1} = \frac{1}{2}\nu RT_0 L$, полученное тепло $Q_+ = \nu RT_0(3+L)$:

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{L}{2(3+L)} = \frac{1}{2\left(1+\dfrac{3}{L}\right)}, \qquad L = \ln\frac{\operatorname{tg}(\delta+\alpha)}{\operatorname{tg}\delta}.$$

КПД растёт вместе с L, значит, нужно найти диапазон L.

9. Допустимые δ. Должны выполняться $\delta > 0$ и $\delta+\alpha < \pi/2$ (наклоны меньше $90°$). Точка $(1;1)$ лежит на отрезке $4-1$ между точками 4 и 1, то есть $V_1 \le V_0 \le V_4$, откуда $t_2 \ge 1 \ge t_1$:

$$\max\left(0, \frac{\pi}{4} - \alpha\right) \le \delta \le \min\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

причём границы $\delta = 0$ и $\delta = \pi/2 - \alpha$ не достигаются.

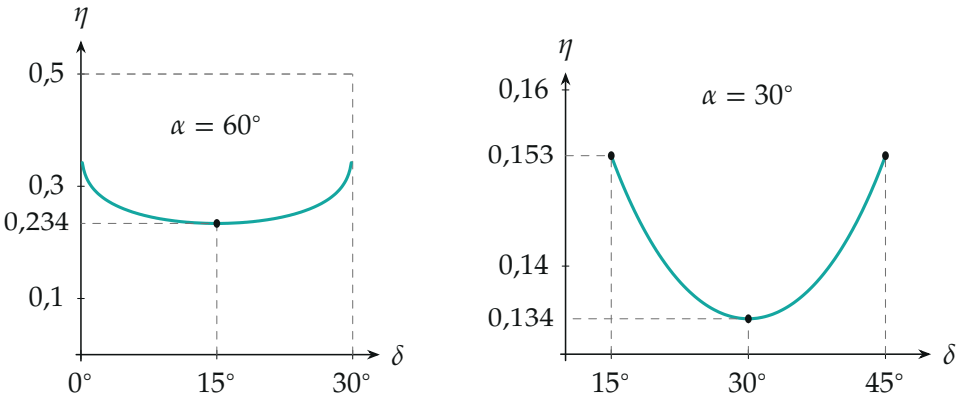
10. Минимум L. Отношение $g = \operatorname{tg}(\delta+\alpha)/\operatorname{tg}\delta$ стремится к бесконеч-

ности и при $\delta \to 0$, и при $\delta + \alpha \to \pi/2$. Производная логарифма

$$\frac{d\ln g}{d\delta} = \frac{2}{\sin 2(\delta+\alpha)} - \frac{2}{\sin 2\delta}$$

обращается в нуль при $\sin 2(\delta+\alpha) = \sin 2\delta$, то есть при $2\delta+2\alpha = \pi - 2\delta$, $\delta_* = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ (прямые $1-2$ и $3-4$ симметричны относительно биссектрисы $p/p_0 = V/V_0$). Это единственный экстремум, значит, минимум; он лежит в допустимом диапазоне при любом α. Тогда

$$g_{\min} = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4+\alpha/2)}{\operatorname{tg}(\pi/4-\alpha/2)} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}, \qquad \eta_{\min} = \frac{1}{2\left(1+\dfrac{3}{\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)}.$$



КПД как функция δ: слева $\alpha = 60°$, справа $\alpha = 30°$ (у правого графика ось η начинается с 0,13). При $\alpha = 60°$ к значению 0,5 КПД подходит лишь логарифмически медленно, при $\delta \to 0$ и $\delta \to 30°$.

11. Максимум η. Он достигается на границах допустимых δ. Если $\alpha \geq \pi/4$, то δ может сколь угодно приближаться к 0 (и к $\pi/2-\alpha$), $L \to \infty$ и $\eta \to \frac{1}{2}$, не достигая его: $\eta < \frac{1}{2}$. Если $\alpha < \pi/4$, то граничные значения $\delta = \pi/4 - \alpha$ и $\delta = \pi/4$ дают одно и то же $L = \ln\operatorname{tg}(\pi/4+\alpha)$ (так как

$\operatorname{tg}(\pi/4+\alpha)\operatorname{tg}(\pi/4-\alpha)=1$), и

$$\eta\le\eta_{\max}=\frac{1}{2\left(1+\dfrac{3}{\ln\operatorname{tg}(\pi/4+\alpha)}\right)}.$$

Обратите внимание: самый маленький КПД получается при симметричном цикле, а не при крайнем δ; на границах КПД, наоборот, максимален.

12. Числа. При $\alpha=\pi/3$ (это больше $\pi/4$): $\sin\alpha=0{,}866$, $\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\approx 13{,}9$, $L_{\min}=2{,}63$, $\eta_{\min}=\dfrac{2{,}63}{2\cdot 5{,}63}\approx 0{,}234$, а сверху $\eta<0{,}5$. При $\alpha=\pi/6$ (меньше $\pi/4$): $L_{\min}=\ln 3=1{,}099$, $\eta_{\min}\approx 0{,}134$; $L_{\max}=\ln\operatorname{tg}75^\circ=\ln 3{,}73=1{,}317$, $\eta_{\max}\approx 0{,}1525$.

Проверка. Работа за цикл $A=Q_+-|Q_-|$: $\nu RT_0(3+L)-\nu RT_0(3+L/2)=\frac12\nu RT_0L$ — как в пункте 8. Предел: при $L\to\infty$ КПД стремится к $\frac12=\eta_K$, не превышая КПД Карно между теми же температурами; при $L\to 0$ он стремится к нулю (цикл схлопывается). Формула для η проверена численным интегрированием δQ по всем четырём участкам при нескольких (α,δ): совпадение до шестого знака.

Смысл: КПД определяется степенью «расширения» цикла на изотермах; он тем больше, чем сильнее различаются наклоны $1-2$ и $3-4$, и никогда не достигает КПД Карно.

Ответ. 1) $\beta_{4-1}=45^\circ$, $\beta_{2-3}=\operatorname{arctg}2\approx 63{,}4^\circ$; 2) график на рисунке: вертикальные отрезки $T/T_0=1$ и 2, кривые $n\propto T^{-1/2}$, точка $(1;1)$ на $T/T_0=1$; 3) $\eta=\dfrac{L}{2(3+L)}$, $L=\ln\dfrac{\operatorname{tg}(\delta+\alpha)}{\operatorname{tg}\delta}$; снизу $\eta\ge\dfrac{L_{\min}}{2(3+L_{\min})}$, $L_{\min}=\ln\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$; сверху $\eta<\frac12$ при $\alpha\ge\pi/4$ и $\eta\le\dfrac{L_{\max}}{2(3+L_{\max})}$, $L_{\max}=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, при $\alpha<\pi/4$; 4) $0{,}234\le\eta<0{,}5$; 5) $0{,}134\le\eta\le 0{,}153$.