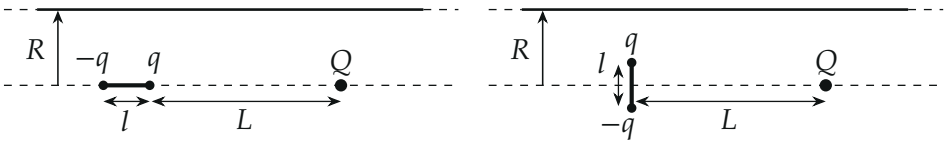
Электростатический этюд

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, 11 класс, задача 3] На оси бесконечной цилиндрической полости радиусом R с проводящими стенками находится электрический диполь с зарядами q и $-q$ и плечом l. На расстоянии L от него также на оси расположен электрический заряд Q. При этом $l \ll R, L$. На заряд Q действует сила F_Q. Электрический диполь в этой системе разворачивают на 90°, так что ось полости становится серединным перпендикуляром к плечу диполя, а расстояние до заряда не меняется. В этом случае на диполь действует сила F_D.

1. Найдите отношение $\dfrac{F_Q}{F_D}$.

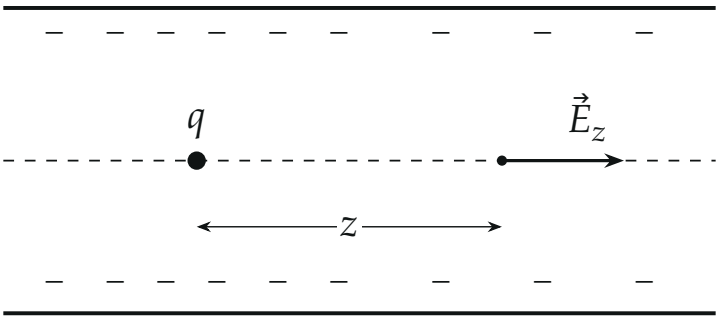


▲ **Решение. Что происходит.** На стенках полости наводятся заряды, и их поле нам неизвестно. Но оно линейно по зарядам, которые его вызвали. Поэтому поле на оси от точечного заряда q, стоящего на оси, вместе с зарядами на стенке записывается одной неизвестной функцией $f(z)$. Обе силы выражаются через неё и в отношении сокращаются. Главная идея: сила на повёрнутый диполь определяется поперечным полем вблизи оси, а оно связано с производной f' теоремой Гаусса.

Обозначения. Ось z направлена по оси полости. Точечный заряд q, стоящий в точке $z = 0$, вместе с наведёнными им зарядами создаёт на оси в точке z поле

$$E_z(z) = qf(z).$$

Функция f нечётна по z: картина зеркально симметрична относительно плоскости $z = 0$, поэтому её производная f' чётна. Без стенки $f(z) = k/z^2$ (при $z > 0$).



Заряд q на оси и наведённые им заряды стенки; на оси в точке на расстоянии z поле $E_z = qf(z)$.

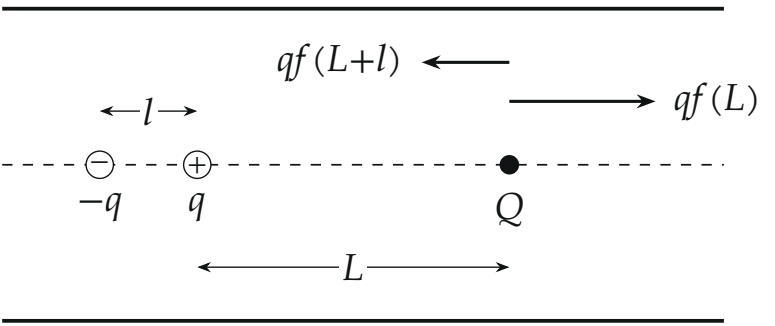
1. Диполь вдоль оси: сила на заряд Q. Положительный заряд диполя стоит на расстоянии L от Q, отрицательный — на $L + l$. Каждый из зарядов вместе со своими наведёнными зарядами создаёт в точке, где стоит Q, поле $qf(L)$ и $-qf(L + l)$ (направления противоположны). По принципу суперпозиции поле в точке Q

$$E_1 = q(f(L) - f(L + l)) \approx -ql f'(L),$$

потому что $l \ll L$ и разность значений функции заменяется производной. Сила на Q:

$$F_Q = QE_1 = -qQl f'(L).$$

Заряды, наведённые самим Q, на него не действуют: они расположены симметрично относительно плоскости, проходящей через Q поперёк оси.



Поле диполя в точке Q: поле положительного заряда направлено от него, отрицательного — к нему; второе слабее, потому что дальше.

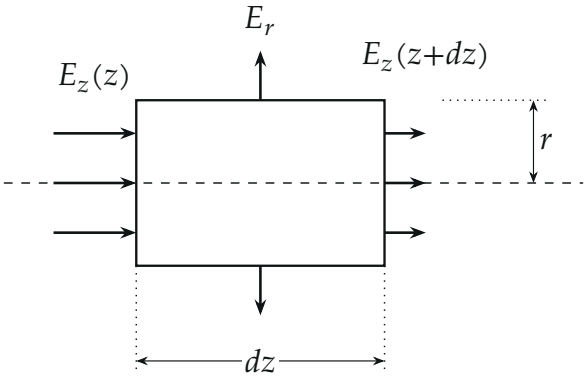
2. Диполь повёрнут: осевое поле заряда Q у диполя. Теперь Q стоит на оси, и его поле вместе с наведёнными им зарядами на оси равно $E_z(z') = Qf(z' - L)$, где z' — координата точки; обе частицы диполя находятся на оси в точке $z' = 0$ (с малым смещением $\pm l/2$ от неё). Осевая проекция поля у них одинакова, а заряды q и $-q$ противоположны, поэтому осевые силы друг друга уравновешивают. Остаётся радиальная составляющая поля.

3. Радиальное поле вблизи оси из теоремы Гаусса. Возьмём тонкий цилиндр радиусом $r \ll R$ и высотой dz, ось которого совпадает с осью полости. Внутри него нет зарядов (поле здесь создают Q и его заряды на стенке), поэтому поток поля через его поверхность равен нулю. Поток через основания даёт $\pi r^2(E_z(z + dz) - E_z(z)) = \pi r^2 \dfrac{dE_z}{dz}\, dz$, через боковую поверхность — $2\pi r\, dz\, E_r$:

$$\pi r^2 \frac{dE_z}{dz}\, dz + 2\pi r\, dz\, E_r = 0 \quad \Rightarrow \quad E_r = -\frac{r}{2}\frac{dE_z}{dz}.$$

В точке, где стоит диполь, $\dfrac{dE_z}{dz} = Qf'(-L) = Qf'(L)$ (производная чётна), значит

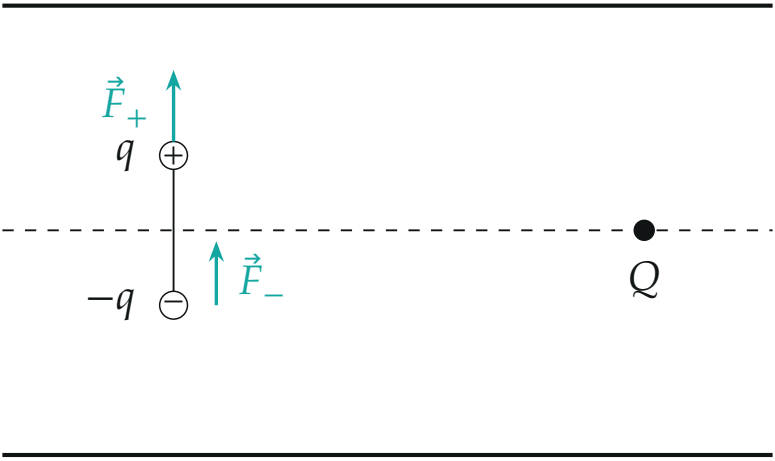
$$E_r(r) = -\frac{r}{2} Qf'(L).$$



Осевое сечение гауссова цилиндра. Осевое поле убывает вдоль оси, значит, часть линий выходит через боковую поверхность наружу.

4. Сила на повёрнутый диполь. Радиальное поле направлено вдоль радиуса от оси: у заряда $+q$ (на расстоянии $l/2$ от оси) — в одну сторону, у заряда $-q$ (на таком же расстоянии по другую сторону) — в противоположную; сила на $-q$ тоже меняет знак, поэтому обе радиальные силы направлены в одну сторону и складываются:

$$F_D = 2\,q\,|E_r(l/2)| = \frac{1}{2}\,qQ\,l\,|f'(L)|.$$



Радиальные силы на частицы повёрнутого диполя (стрелка $\vec{F}_-$ сдвинута вправо, чтобы не лежать на $\vec{F}_+$). Осевые составляющие сил равны и противоположны и в сумме дают нуль.

5. Поле зарядов, наведённых самим диполем. В первом положении оно уже входит в f (поле заряда на оси вместе с его зарядами на стенке). Во втором положении у диполя есть ось симметрии, и сила от его собственных наведённых зарядов равна нулю: из симметрии относительно плоскости $z = 0$, в которой лежат оба заряда, их поле не имеет осевой составляющей, а радиальные силы на $+q$ и $-q$ направлены в противоположные стороны (каждая частица притягивается к стенке со своей стороны).

Обратите внимание: третий закон Ньютона для пары «диполь — заряд Q» здесь не применить. Часть сил действует со стороны зарядов на стенках, и сила на диполь не обязана быть равна по модулю силе на Q в том же положении; поэтому силу на повёрнутый диполь мы считаем через поле в том месте, где он стоит.

6. Отношение. Сила на Q в первом случае равна $|qQlf'(L)|$, сила на диполь во втором — половине этой величины. Неизвестная функция f входит в обе одинаково, поэтому

$$\frac{F_Q}{F_D} = \frac{|qQlf'(L)|}{\frac{1}{2}|qQlf'(L)|} = 2.$$

Проверка. Уберём стенку, $R \to \infty$: $f = k/z^2, f' = -2k/z^3$. Тогда сила на заряд Q на оси диполя

$$F_Q = \frac{2kqQl}{L^3}.$$

Радиальное поле заряда Q у диполя прямым расчётом $E_r = kQr/L^3$ (формула Гаусса даёт то же: $-\frac{r}{2}Qf' = kQr/L^3$), и

$$F_D = 2q \cdot \frac{kQ\,(l/2)}{L^3} = \frac{kqQl}{L^3}, \qquad \frac{F_Q}{F_D} = 2.$$

Размерность: обе силы $\sim kqQl/L^3$, отношение безразмерно.

Смысл: неизвестное поле стенки в отношении сокращается, потому что осевую силу на Q и поперечную силу на повёрнутый диполь определяет одна и та же скорость убывания осевого поля f'. Поперечное поле вдвое слабее, потому что убыль осевого потока «растекается» по двум поперечным направлениям, а не по одному.

Ответ. $\dfrac{F_Q}{F_D} = 2.$