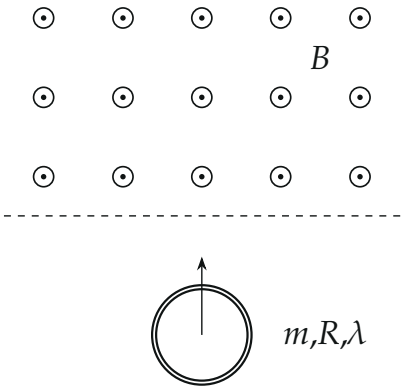
Кольцо на границе

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, 11 класс, задача 4] В полупространстве создано вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B. На гладкой горизонтальной плоскости, касаясь границы области, с магнитным полем, лежит жёсткое непроводящее тонкое кольцо массой m и радиусом R. Кольцо равномерно заряжено с линейной плотностью заряда λ. Кольцу сообщают некоторую начальную скорость, вектор которой горизонтален и перпендикулярен границе области с магнитным полем, при этом до пересечения области с магнитным полем кольцо двигается поступательно.



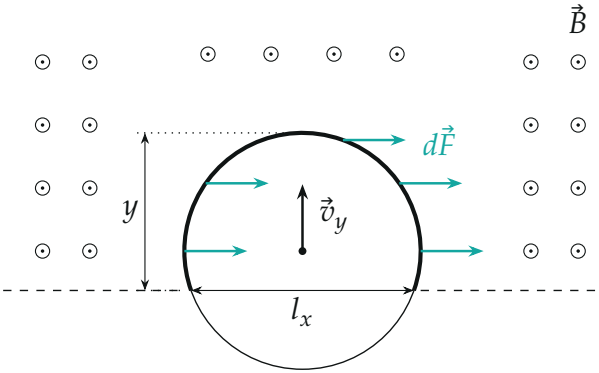
1. Пусть начальная скорость кольца такова, что оно полностью оказалось в магнитном поле. Определите угловую скорость вращения кольца сразу после этого.
2. Определите минимальное значение начальной скорости $v_{\min}$, при которой кольцо целиком окажется в области магнитном поле.
3. Сообщим кольцу скорость $v_0 > v_{\min}$. Определите угол θ, который будет составлять вектор скорости центра кольца с границей области магнитного поля сразу после того, как кольцо полностью пересечёт границу.
4. Определите максимальное расстояние $y_{\max}$ от границы, на которое удалится центр кольца.

Примечание. При решении задачи вам может потребоваться вычислить следующий интеграл:

$$\int \arccos z\, dz = z \arccos z - \sqrt{1 - z^2} + \text{const}.$$

▲ **Решение.** **Что происходит.** Сила Лоренца работы не совершает, поэтому энергия кольца постоянна: кинетическая энергия движения центра и вращения в сумме остаётся равной начальной. Пока кольцо въезжает в поле, сила Лоренца перераспределяет эту энергию между тремя движениями: вдоль границы, поперёк границы и вращением. Главная идея: сила, действующая на дугу кольца внутри поля, сводится к длине хорды этой дуги, а произведение хорды на малое смещение — это приращение площади, вошедшей в поле. Поэтому ω и v_x выражаются через площадь и через интеграл от длины дуги, а когда кольцо целиком в поле, его центр движется как точечный заряд.

Обозначения. Ось y перпендикулярна границе и направлена в сторону поля, ось x — вдоль границы. v_x, v_y — скорости центра кольца, ω — угловая скорость вращения вокруг вертикальной оси через центр, $I = mR^2$ — момент инерции кольца. y — глубина проникновения: расстояние от границы до самой дальней точки кольца (она равна смещению центра от начала движения). l — длина дуги кольца в поле, l_x — длина хорды этой дуги. Вектор $\vec{B}$ направлен на нас (как на рисунке), $\lambda > 0$.



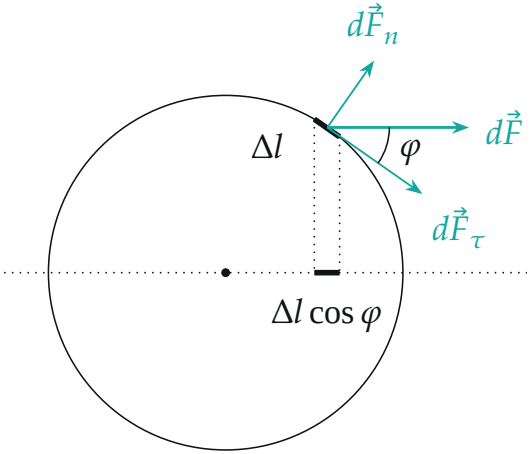
Кольцо въезжает в поле со скоростью v_y. Утолщена дуга в поле, на каждый

её элемент действует сила Лоренца вдоль границы.

1. Что делает каждая часть движения. Скорость элемента кольца равна $\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}$, сила на заряд $\lambda\, dl$ в поле — $d\vec{F} = \lambda\, dl\, \vec{u} \times \vec{B}$, то есть складывается из трёх независимых частей. Дуга внутри поля симметрична относительно вертикального диаметра (он перпендикулярен границе).

- Вращение: скорость элемента направлена по касательной, сила — по радиусу. Радиальная сила момента относительно центра не создаёт, а суммарная сила вдоль x по симметричной дуге равна нулю. Вращение на v_x и на ω не влияет.
- Скорость v_x: сила на каждый элемент направлена вдоль y и одинакова. Момента нет (по симметричной дуге сумма координат x элементов равна нулю), меняется только v_y.
- Скорость v_y: сила на каждый элемент равна $\lambda\, dl\, B\, v_y$ и направлена вдоль x. Эта часть и меняет v_x, и раскручивает кольцо.

Пункт 1. Угловая скорость после полного входа. Момент относительно центра создаёт только касательная составляющая силы, она равна $R\, dF \cos\varphi$, где φ — угол между касательной и осью x. Составляющая силы на элемент Δl: $\lambda\, \Delta l\, B v_y \cos\varphi$, и $\Delta l \cos\varphi$ — проекция элемента на ось x.



Элемент кольца Δl, сила на него вдоль x и её составляющие: вдоль касательной $d\vec{F}_\tau$ и вдоль радиуса $d\vec{F}_n$.

Сумма проекций элементов дуги на ось x — это расстояние между её концами, то есть длина хорды l_x. Поэтому суммарная касательная сила $\lambda B v_y l_x$, момент $R\lambda B v_y l_x$, и уравнение моментов

$$mR^2 \frac{d\omega}{dt} = R\lambda B\, v_y\, l_x.$$

Умножим на dt/R и учтём $v_y\, dt = dy$:

$$mR\, d\omega = \lambda B\, l_x\, dy = \lambda B\, dS,$$

где $dS = l_x\, dy$ — площадь тонкой полоски круга, которая вошла в поле за время dt. Просуммируем от начала до полного входа: вошла вся площадь круга, $S = \pi R^2$:

$$mR\,\omega = \lambda B\,\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\pi\lambda B R}{m}.$$

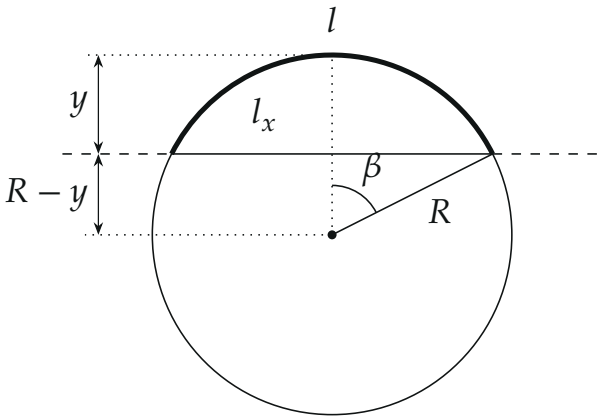
Обратите внимание: когда кольцо целиком в поле, хорда $l_x = 0$, и момент исчезает — ω дальше не меняется. Вращение — по часовой стрелке, если смотреть вдоль $\vec{B}$ с острия (на рисунке).

Пункт 2. Минимальная скорость. Дальнейшее зависит от того, как растёт v_x. На дугу длиной l в поле действует суммарная сила $\lambda B v_y l$ вдоль x:

$$m\, dv_x = \lambda B\, l\, v_y\, dt = \lambda B\, l\, dy.$$

Если кольцо вошло на глубину y ($0 \le y \le 2R$), хорда отстоит от центра на $R - y$, а половина дуги видна из центра под углом $\arccos\dfrac{R-y}{R}$, так что

$$l(y) = 2R \arccos\frac{R-y}{R}.$$



Кольцо на глубине $y < R$: утолщена дуга в поле длиной $l = 2R\beta$, где $\cos\beta = (R-y)/R$.

Интегрируем от входа до полного проникновения, $z = \dfrac{R-y}{R}$, $dy = -R\,dz$:

$$v_x = \frac{2\lambda BR}{m}\int_0^{2R}\arccos\frac{R-y}{R}\,dy = \frac{2\lambda BR^2}{m}\int_{-1}^{1}\arccos z\,dz$$
$$= \frac{2\lambda BR^2}{m}\Big[z\arccos z - \sqrt{1-z^2}\Big]_{-1}^{1} = \frac{2\pi\lambda BR^2}{m}.$$

Сила Лоренца работы не совершает, значит, сохраняется энергия:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m(v_x^2+v_y^2)}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2}.$$

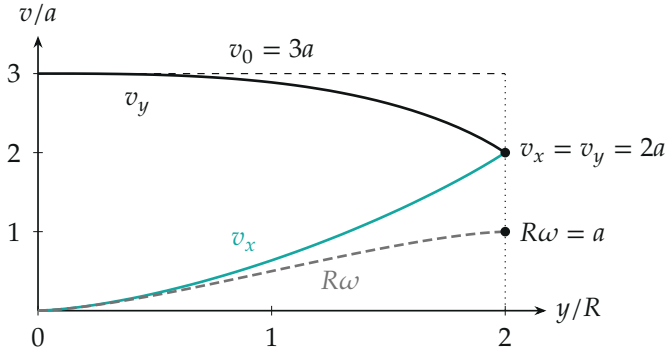
С ростом глубины v_x и ω только растут, значит, v_y только убывает. Кольцо едва успевает целиком войти, если v_y обращается в нуль именно в конце:

$$v_{\min}^2 = v_x^2 + R^2\omega^2 = \left(\frac{2\pi\lambda BR^2}{m}\right)^2 + \left(\frac{\pi\lambda BR^2}{m}\right)^2, \qquad v_{\min} = \frac{\sqrt{5}\,\pi\lambda BR^2}{m}.$$

Пункт 3. Угол вектора скорости. Пусть $a = \dfrac{\pi\lambda BR^2}{m}$; тогда к момен-

ту полного входа $v_x = 2a$, $R\omega = a$, $v_{\min}^2 = 5a^2$. Из закона сохранения энергии

$$v_y = \sqrt{v_0^2 - v_x^2 - R^2\omega^2} = \sqrt{v_0^2 - 5a^2} = \sqrt{v_0^2 - v_{\min}^2}.$$



Составляющие скорости при $v_0 = 3a$ (в единицах $a = \pi\lambda BR^2/m$): v_x и $R\omega$ растут, v_y убывает; в сумме квадратов остаётся v_0^2.

Угол с границей (осью x):

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sqrt{v_0^2 - 5a^2}}{2a} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\sqrt{\left(\frac{mv_0}{2\pi\lambda BR^2}\right)^2 - \frac{5}{4}}.$$

Пункт 4. Максимальное удаление. Теперь кольцо целиком в поле. Силы от вращения по кольцу складываются в нуль, момента нет, ω постоянна, и центр движется как точечный заряд $Q = 2\pi R\lambda$. Для него снова $m\,dv_x = QB\,dy$, откуда $m\,\Delta v_x = QB\,\Delta y$, где Δy отсчитывается от положения центра в момент полного входа (центр на расстоянии R от границы). Скорость центра v_c по модулю постоянна: энергия вращения уже не меняется, значит,

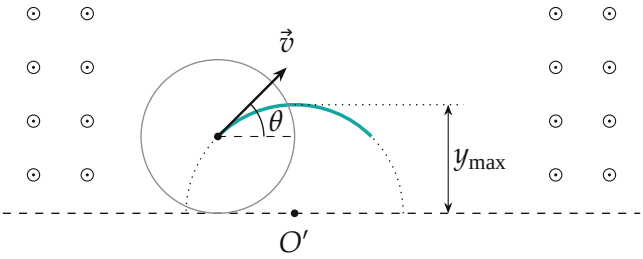
$$v_c^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 - R^2\omega^2 = v_0^2 - a^2.$$

Максимальное удаление — когда $v_y = 0$ и $v_x = v_c$:

$$y_{\max} = R + \frac{m\,(v_c - 2a)}{2\pi\lambda RB} = R + \frac{mv_c}{2\pi\lambda RB} - R = \frac{mv_c}{2\pi\lambda RB}.$$

Здесь использовано $\dfrac{m \cdot 2a}{2\pi\lambda RB} = R$. Подставляя v_c:

$$y_{\max} = \frac{m\sqrt{v_0^2 - a^2}}{2\pi\lambda RB} = \sqrt{\left(\frac{mv_0}{2\pi\lambda RB}\right)^2 - \frac{R^2}{4}}.$$



Центр кольца после полного входа движется по дуге окружности; её центр O' лежит на границе, радиус равен $y_{\max}$.

Геометрический смысл: центр окружности лежит на самой границе. Действительно, высота центра окружности над границей равна $R - \dfrac{mv_x}{2\pi\lambda RB} = R - R = 0$ при $v_x = 2a$, поэтому $y_{\max}$ равно радиусу окружности $r = \dfrac{mv_c}{QB}$.

Проверка. Размерность: $\lambda BR/m$ — это (Кл/м)(Тл)(м)/кг, а Тл = кг/(Кл·с), получается 1/с. Пределы: при $v_0 = v_{\min}$ получаем $\theta = 0$ (кольцо в конце уходит вдоль границы), а $y_{\max} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}}\,R = R$ — центр останавливается на расстоянии R, как раз у полного входа. Ещё одна проверка — численное интегрирование уравнений движения кольца (4000 элементов, $v_0 \approx 2{,}87\,a$): $\omega R = a$, $v_x = 2a$ (расхождение с формулами меньше 0,1 %), $\tan\theta = 0{,}8945$ против 0,8954, $y_{\max} = 1{,}3423\,R$ против $1{,}3423\,R$.

Смысл: сила Лоренца только перекладывает энергию между поступательным и вращательным движением; вся «раскрутка» определяется потоком поля через кольцо, а потом кольцо ведёт себя как точечный заряд на круговой орбите с центром на границе.

Ответ. 1) $\omega = \dfrac{\pi\lambda BR}{m}$; 2) $v_{\min} = \dfrac{\sqrt{5}\,\pi\lambda BR^2}{m}$;

$$3)\ \theta = \arctan\sqrt{\left(\frac{mv_0}{2\pi\lambda BR^2}\right)^2 - \frac{5}{4}};$$

$$4)\ y_{\max} = \sqrt{\left(\frac{mv_0}{2\pi\lambda RB}\right)^2 - \frac{R^2}{4}}.$$