RLC-метр

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, 11 класс, задача 5] *RLC*-метр это прибор, позволяющий непосредственно измерять сопротивления, индуктивности и емкости. В него встроены генератор синусоидального напряжения, а также вольтметры, позволяющие измерять напряжения на выводах прибора и на резисторе, подключенном к одному из выводов. Таким образом, прибор определяет соотношение амплитуд протекающего через него тока и напряжения на выходах. По этим измеренным значениям и известной частоте рассчитывается значение измеряемой величины (индуктивности, емкости или сопротивления в зависимости от режима).

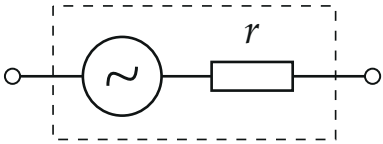


Схема *RLC*-метра

Экспериментатор Глюк взял катушку с индуктивностью L и конденсатор с емкостью C. В первом эксперименте он соединил их последовательно, подключил к *RLC*-метру и снял показания в двух режимах работы. В режиме измерения индуктивности показания были равны $L_1 = 6{,}20$ мГн, а в режиме измерения емкости — $C_1 = 2{,}84$ мкФ. Во втором эксперименте те же самые элементы были соединены параллельно и подключены к тому же прибору. В режиме измерения индуктивности прибор показал $L_2 = 21{,}3$ мГн. Частота при всех этих измерениях поддерживалась одинаковой.

1. Какое значение C_2 покажет *RLC*-метр в режиме измерения емкости во втором эксперименте? Получите формулу и численное значение.
2. Чему равны индуктивность L и емкость C используемых Глюком катушки и конденсатора? Получите формулы и численные значения.

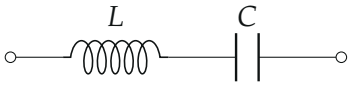
3. Пусть теперь измерения производятся для неидеальной катушки, индуктивность которой $L = 10{,}0$ мГн, а сопротивление $R = 5{,}0$ Ом. При каких значениях частоты f, на которой производятся измерения, связанная с сопротивлением погрешность определения индуктивности меньше 0,1 %? Считайте, что реальную катушку можно представить как последовательно соединенные идеальную катушку и резистор.
4. К катушке из предыдущего пункта Глюк последовательно присоединил конденсатор с емкостью $C = 1{,}00$ мкФ. Экспериментатор провел измерения индуктивности полученной цепи RLC-метром в максимально широком диапазоне частот. Постройте качественный график зависимости измеренных значений индуктивности от частоты. Укажите характерные точки и асимптотики зависимости индуктивности от частоты в пределе малых и больших частот.

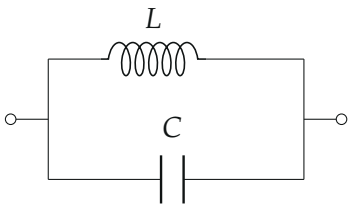
▲ **Решение.** **Что происходит.** Прибор измеряет только отношение амплитуд напряжения и тока, то есть модуль импеданса $|Z|$ подключённой цепи, и пересчитывает его по формулам идеальных элементов. У идеальной катушки $|Z| = \omega L$, у идеального конденсатора $|Z| = 1/(\omega C)$, поэтому показания в двух режимах равны

$$L_{\text{изм}} = \frac{|Z|}{\omega}, \qquad C_{\text{изм}} = \frac{1}{\omega |Z|}.$$

Главное наблюдение: произведение показаний не зависит от цепи, $L_{\text{изм}} C_{\text{изм}} = 1/\omega^2$. Оно даёт пункт 1 сразу, а в остальных пунктах всё сводится к нахождению $|Z|$ нужной цепи.

Обозначения. Импеданс катушки $Z_L = i\omega L$, конденсатора $Z_C = -\dfrac{i}{\omega C}$, резистора $Z_R = R$; ω — циклическая частота измерений.





Слева — последовательное соединение катушки и конденсатора, справа — параллельное; прибор подключается к выводам.

Пункт 1. Для любой цепи при одной и той же частоте

$$L_{\text{изм}}C_{\text{изм}} = \frac{|Z|}{\omega}\cdot\frac{1}{\omega|Z|} = \frac{1}{\omega^2}.$$

Частота во всех опытах одна, значит $L_1C_1 = L_2C_2 = 1/\omega^2$ и

$$C_2 = \frac{L_1C_1}{L_2} = \frac{6{,}20\cdot 2{,}84}{21{,}3}\ \text{мкФ} \approx 0{,}83\ \text{мкФ}.$$

Заодно найдена частота: $\omega^2 = \dfrac{1}{L_1C_1}$, $\omega \approx 7{,}5\cdot 10^3\ \text{с}^{-1}$, $f \approx 1{,}2$ кГц.

Пункт 2. Последовательное соединение:

$$Z_s = Z_L + Z_C = i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

так что

$$\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| = \omega L_1.$$

Параллельное: $Z_p = \dfrac{Z_LZ_C}{Z_L+Z_C} = \dfrac{L/C}{i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}$, и с учётом предыдущей формулы

$$|Z_p| = \frac{L/C}{\omega L_1} = \omega L_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{L}{C} = \omega^2L_1L_2 = \frac{L_2}{C_1} \quad\Rightarrow\quad C = \frac{C_1}{L_2}L.$$

Подставим C в первое уравнение, разделив его на ω и используя $\dfrac{1}{\omega^2C} = \dfrac{L_1C_1}{C} = \dfrac{L_1L_2}{L}$:

$$\left|L - \frac{L_1L_2}{L}\right| = L_1.$$

Обратите внимание: модуль раскрывается двумя способами, поэтому

два квадратных уравнения $L^2 \mp L_1 L - L_1 L_2 = 0$, и условию удовлетворяют оба положительных корня:

$$L = \frac{\sqrt{L_1^2 + 4L_1L_2} \pm L_1}{2}, \qquad C = \frac{C_1}{L_2} L = \frac{C_1}{2L_2}\left(\sqrt{L_1^2 + 4L_1L_2} \pm L_1\right).$$

Числа ($\sqrt{L_1^2 + 4L_1L_2} = 23{,}8$ мГн):

$$L = 15{,}0 \text{ мГн},\ C = 2{,}00 \text{ мкФ} \quad \text{или} \quad L = 8{,}80 \text{ мГн},\ C = 1{,}17 \text{ мкФ}.$$

В первом случае на частоте измерений $\omega L > \dfrac{1}{\omega C}$ (цепь индуктивная), во втором — наоборот; модуль импеданса одинаков, прибор их не различает.

Пункт 3. Неидеальная катушка — последовательно катушка и резистор: $Z = R + i\omega L$, $|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$, и

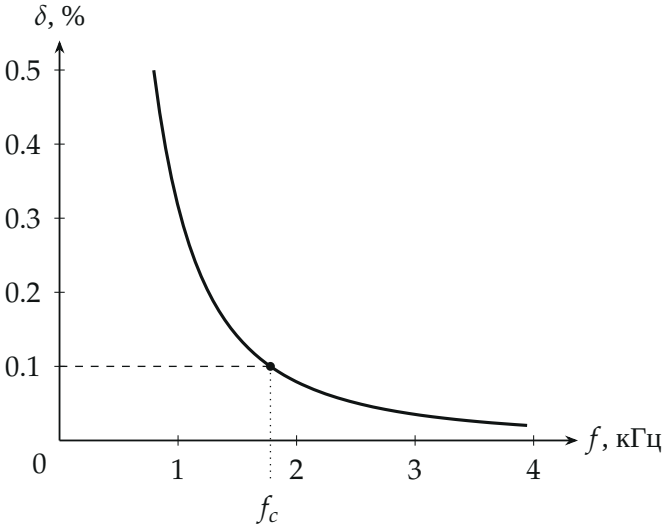
$$L_{\text{изм}} = \sqrt{L^2 + \frac{R^2}{\omega^2}} > L.$$

Это завышение, и оно убывает с частотой: чем больше ωL по сравнению с R, тем меньше влияние резистора. Относительная погрешность $\delta = \dfrac{L_{\text{изм}} - L}{L}$ должна быть меньше $\delta_0 = 10^{-3}$:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2} < 1 + \delta_0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 < 2\delta_0 + \delta_0^2 \approx 2\delta_0.$$

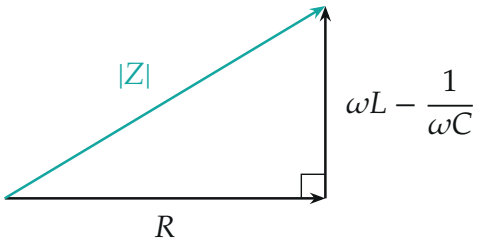
Отсюда

$$\omega > \omega_c = \frac{R}{L\sqrt{2\delta_0}}, \qquad f > f_c = \frac{R}{2\pi L\sqrt{2\delta_0}} = \frac{500 \text{ с}^{-1}}{2\pi\sqrt{2 \cdot 10^{-3}}} \approx 1{,}78 \text{ кГц}.$$



Погрешность $\delta(f) = \sqrt{1 + (R/\omega L)^2} - 1$*: меньше* 0,1 % *при* $f > f_c \approx 1{,}78$ *кГц.*

Пункт 4. Для цепи R, L, C последовательно $Z = R + i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$:



Импеданс последовательной цепи на комплексной плоскости: $|Z|^2 = R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2$.

Прибор показывает $L_{\text{изм}} = |Z|/\omega$:

$$L_{\text{изм}} = \sqrt{\frac{R^2}{\omega^2} + \left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right)^2}.$$

Большие частоты: слагаемые с $1/\omega^2$ стремятся к нулю, $L_{\text{изм}} \to L$ (снизу, так как $1/C \gg R^2/2L$). *Малые частоты:* главное слагаемое $\dfrac{1}{\omega^2 C}$,

$L_{\text{изм}} \approx \dfrac{1}{(2\pi f)^2 C} \to \infty$: на малых частотах цепь для прибора — конденсатор.

Минимум. Введём $x = 1/\omega^2$. Тогда

$$L_{\text{изм}}^2 = R^2 x + \left(L - \frac{x}{C}\right)^2$$

— парабола по x с положительным коэффициентом при x^2. Её минимум там, где производная равна нулю:

$$R^2 - \frac{2}{C}\left(L - \frac{x}{C}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_0 = C\left(L - \frac{R^2 C}{2}\right), \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC\left(1 - \dfrac{R^2 C}{2L}\right)}} \approx 1{,}59 \text{ кГц},$$

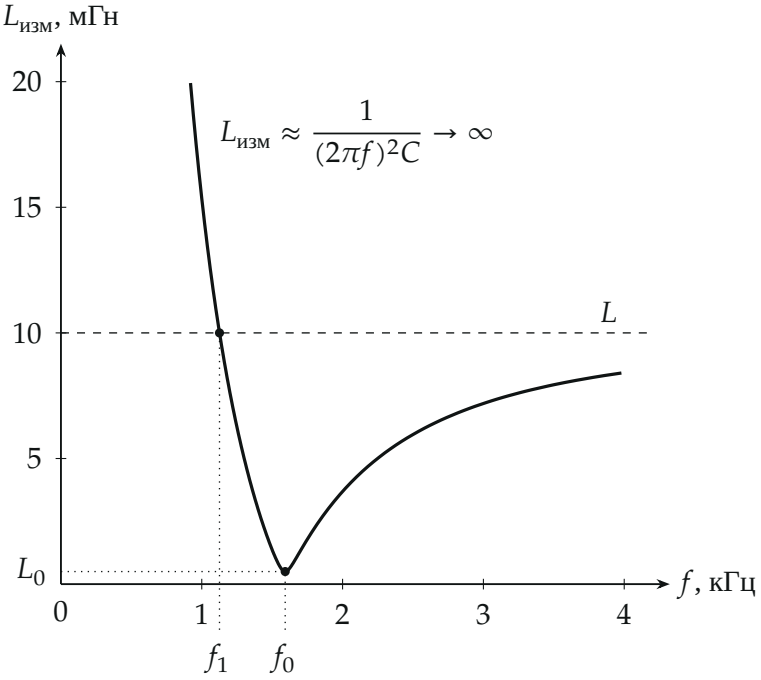
$$L_0 = R\sqrt{LC - \frac{R^2 C^2}{4}} \approx 0{,}50 \text{ мГн}.$$

Минимум существует при $R^2 C < 2L$ (здесь $R^2 C/(2L) \approx 1{,}3 \cdot 10^{-3}$). Он лежит почти на резонансной частоте $f_{\text{рез}} = 1/(2\pi\sqrt{LC}) = 1{,}59$ кГц: там $|Z| \approx R$ и $L_{\text{изм}} \approx R\sqrt{LC}$.

Ещё одна характерная точка — где показание равно истинному, $L_{\text{изм}} = L$. Из $R^2 x - \dfrac{2Lx}{C} + \dfrac{x^2}{C^2} = 0$ находим $x_1 = C(2L - R^2 C)$:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{C(2L - R^2 C)}} \approx 1{,}13 \text{ кГц}.$$

При $f < f_1$ прибор завышает индуктивность, при $f > f_1$ — занижает (до наименьшего значения L_0 при f_0) и затем возвращается к L снизу.



Измеренная индуктивность $L_{изм}(f)$ для цепи $R = 5$ Ом, $L = 10$ мГн, $C = 1$ мкФ. На малых частотах показание растёт как $1/((2\pi f)^2 C)$, на больших подходит к L снизу.

Проверка. Подставим найденные $L = 15{,}0$ мГн, $C = 2{,}00$ мкФ в $\omega = 7536$ с$^{-1}$: $\omega L = 113{,}0$ Ом, $\dfrac{1}{\omega C} = 66{,}3$ Ом, $|Z_s| = 46{,}7$ Ом $= \omega L_1$; $|Z_p| = \dfrac{L/C}{|Z_s|} = \dfrac{7500}{46{,}7} = 160{,}6$ Ом $= \omega L_2$ — совпадает. Предел $R \to 0$ в пункте 4: $L_0 = R\sqrt{LC} \to 0$, показание $|L - 1/(\omega^2 C)|$ обращается в нуль на резонансе, как и должно быть для идеальных L и C. Размерности: $L_0 = R\sqrt{LC}$ — Ом·с, то есть Гн.

Смысл: прибор честно измеряет только $|Z|$, поэтому разные цепи он «видит» одинаково (пункт 2) и ошибается в величине, как только в цепи есть что-то лишнее — резистор или конденсатор (пункты 3 и 4).

Ответ. 1) $C_2 = \dfrac{C_1 L_1}{L_2} \approx 0{,}83$ мкФ.

2) $L = \dfrac{\sqrt{L_1^2 + 4L_1L_2} \pm L_1}{2}$, $C = \dfrac{C_1}{L_2}L$: $L = 15{,}0$ мГн, $C = 2{,}00$ мкФ или $L = 8{,}80$ мГн, $C = 1{,}17$ мкФ.

3) $f > \dfrac{R}{2\pi L\sqrt{2\delta}} \approx 1{,}78$ кГц.

4) при $f \to 0$ $L_{\text{изм}} \approx \dfrac{1}{(2\pi f)^2 C} \to \infty$; при $f \to \infty$ $L_{\text{изм}} \to L$ снизу; минимум $L_0 = R\sqrt{CL - R^2C^2/4} \approx 0{,}50$ мГн при $f_0 \approx 1{,}59$ кГц; $L_{\text{изм}} = L$ при $f_1 \approx 1{,}13$ кГц.