Спица

Задача 1. [ВсОШ 2025-26, 9 класс, задача 2] Проволока закреплена в вертикальной плоскости и состоит из прямого отрезка и полуокружности радиусом R, которые касаются друг друга в верхней точке (см. рисунок 1). На прямом участке расположен груз массой m, на полуокружности — груз массой $2m$. Грузы соединены невесомой нерастяжимой нитью, трение отсутствует. На дополнительном бланке изображены положения грузов при равновесии системы, показано направление ускорения свободного падения и начерчена масштабная сетка.

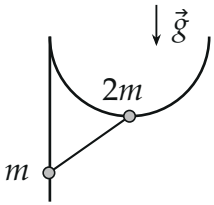


Рис. 1

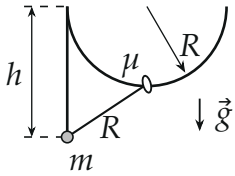


Рис. 2

1. Восстановите расположение проволоки по изображённой системе грузов и определите, чему равен радиус R полуокружности.

Не изменяя форму проволоки, груз массой $2m$ заменили на невесомое колечко, соединённое с телом m нитью длиной R (см. рисунок 2). Коэффициент трения между проволокой и колечком равен μ.

2. При каких расстояниях h между изломом проволоки и грузом m система может находиться в равновесии?

▲ **Решение. Что происходит.** Грузы с нитью — одно тело, натяжение для него внутреннее. На тело действуют три внешние силы: тяжесть $3m\vec{g}$ в центре масс, реакция $\vec{N}_1$ гладкого вертикального участка (горизонтальна) и реакция $\vec{N}_2$ гладкой полуокружности (по радиусу). Линии трёх сил при равновесии пересекаются в одной точке — это даёт направление радиуса в точке $2m$, а касание прямого участка даёт R. В пункте 2 колечко невесомо: реакция проволоки на него направлена вдоль нити, и трение ограничивает её отклонение от радиуса.

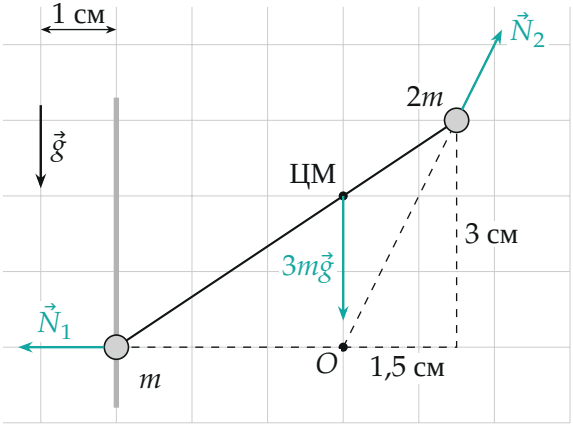
Обозначения. Начало координат — в грузе m, ось x вправо, y вверх. Бланка с сеткой в опубликованных материалах олимпиады нет; по данным официального решения груз $2m$ на 4,5 см правее и на 3 см выше груза m: $m(0;0)$, $2m(4{,}5;3)$. C — центр полуокружности, A — излом. Бланк с построением — на рисунке ниже.

1. Точка пересечения линий сил. Центр масс делит нить в отношении, обратном массам:

$$x_c = \frac{2m \cdot 4{,}5}{3m} = 3\text{ см}, \qquad y_c = \frac{2m \cdot 3}{3m} = 2\text{ см}.$$

Линия тяжести — вертикаль $x = 3$, линия $\vec{N}_1$ — горизонталь $y = 0$ через груз m; они пересекаются в точке $O(3;0)$. По теореме о трёх непараллельных силах линия $\vec{N}_2$ тоже идёт через O, а приложена она в грузе $2m$. Значит, радиус в точке $2m$ лежит на прямой $O \to 2m$; угол φ радиуса с вертикалью:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1{,}5}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

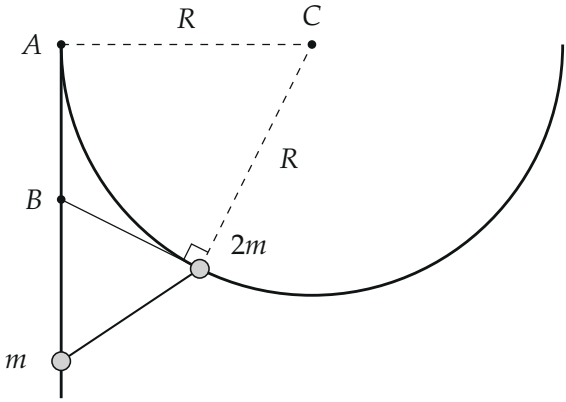


Бланк (сетка 1 см, восстановлен по официальному решению) и построение: линии $\vec{N}_1$ и $3m\vec{g}$ пересекаются в O, линия $\vec{N}_2$ (радиус, пунктир) идёт через O и груз $2m$.

2. Радиус из касания. Центр лежит на радиусе на расстоянии R от груза $2m$: $x_C = 4{,}5 + R\sin\varphi$, $y_C = 3 + R\cos\varphi$. Прямой участок касается окружности в A, поэтому радиус CA горизонтален и $x_C = R$:

$$R = 4{,}5 + R\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad R = \frac{4{,}5\text{ см}}{1 - 1/\sqrt{5}} \approx 8{,}1\text{ см}.$$

Центр $C \approx (8{,}1;\ 10{,}3)$, излом $A(0;\ 10{,}3)$ — на уровне центра, на 10,3 см выше груза m; полуокружность — нижняя половина окружности с центром C.



Восстановленная проволока; B — пересечение касательной в точке $2m$ с прямым участком.

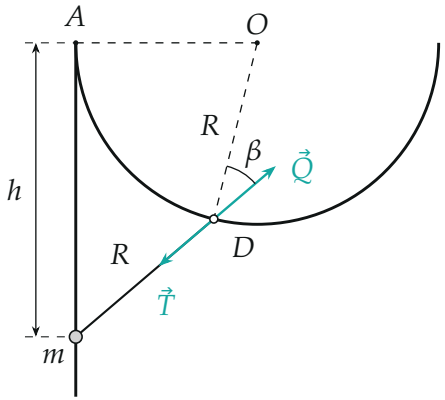
3. Колечко (пункт 2). На невесомое колечко D действуют натяжение $\vec{T}$ и полная реакция проволоки $\vec{Q}$ (нормальная сила плюс трение), поэтому $\vec{Q} = -\vec{T}$ — вдоль нити. Пусть β — угол между $\vec{Q}$ и радиусом DO (O теперь — центр полуокружности). Трение $F_{\text{тр}} = Q\sin\beta$, нормальная сила $N = Q\cos\beta$, и колечко не скользит при $F_{\text{тр}} \leqslant \mu N$:

$$\operatorname{tg}\beta \leqslant \mu \quad \Rightarrow \quad \cos\beta \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

4. Геометрия. Груз m на гладком вертикальном участке держит только вертикальная составляющая натяжения, поэтому нить идёт от m (точка

L) вверх, $h \geqslant R$. Центр O на уровне излома и на R правее, поэтому $OL^2 = R^2 + h^2$. В треугольнике ODL стороны $OD = DL = R$, угол $ODL = 180° - \beta$; по теореме косинусов

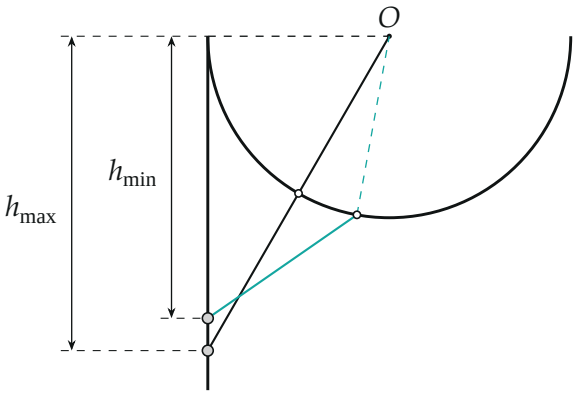
$$R^2 + h^2 = 2R^2(1 + \cos\beta) \quad \Rightarrow \quad h = R\sqrt{1 + 2\cos\beta}.$$



Силы на колечко ($h = 1{,}62\,R$): $\vec{Q} = -\vec{T}$ по нити, β — её угол с радиусом.

5. Допустимые h. Наибольшее h — при $\beta = 0$ (нить продолжает радиус, $OL = 2R$): $h_{\max} = R\sqrt{3}$. С ростом β высота h убывает до $\beta_{\text{кр}} = \operatorname{arctg}\mu$:

$$R\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{1+\mu^2}}} \leqslant h \leqslant R\sqrt{3}.$$



Крайние положения при $\mu = 1$: чёрное — $\beta = 0$, бирюзовое — $\beta = 45°$ ($h_{\min} \approx 1{,}55\,R$).

Обратите внимание: верхняя граница $R\sqrt{3}$ от трения не зависит — дальше нить длиной R не достаёт до полуокружности; нижнюю целиком задаёт трение. Колечко может стоять и по другую сторону от радиуса (симметричное положение) — h то же.

Проверка. Пункт 1 построением: касательная в точке $2m$ пересекает прямой участок в $B(0;\ 5{,}25)$; касательные из B равны, $BA = B2m = \sqrt{4{,}5^2 + 2{,}25^2} \approx 5{,}03$ см, откуда $A(0;\ 10{,}3)$ — тот же излом. Равновесие груза $2m$ отдельно ($T\cos\alpha = mg$ от груза m, α — угол нити с вертикалью) даёт $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha/3 = 0{,}5$ — тот же угол. Пункт 2: при $\mu \to 0$ границы сходятся к $R\sqrt{3}$ (без трения нить только по радиусу), при $\mu \to \infty$ нижняя стремится к R (колечко в изломе, нить вертикальна).

Смысл: без трения полуокружность держит систему в единственном положении, трение растягивает его в интервал, растущий с μ.

Ответ. 1) $R \approx 8{,}1$ см (центр полуокружности на уровне излома, на R правее прямого участка); 2) $R\sqrt{1 + \dfrac{2}{\sqrt{1+\mu^2}}} \leqslant h \leqslant R\sqrt{3}$.