Наезд

Задача 1. [ВсОШ 2025-26, 9 класс, задача 3] Из гладкой проволоки, закреплённой в вертикальной плоскости, изготовлена горка высотой H, состоящая из двух четвертей окружности, соединяющих горизонтальные участки (см. рисунок 1). В начальной точке горки покоится маленькая бусинка массой m, надетая на проволоку. К ней приложена постоянная по модулю и направлению сила $\vec{F}$.

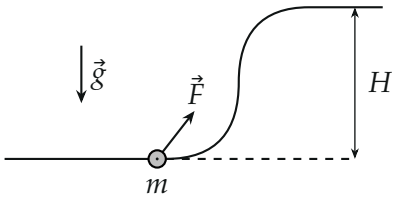


Рис. 1

1. Найдите минимальное значение модуля силы $F_{\min 1}$, при котором бусинка может преодолеть горку, если сила направлена горизонтально.
2. Найдите минимальный модуль силы $F_{\min 2}$, при котором бусинка может преодолеть горку. Под каким углом α_{opt} к горизонтали должна быть направлена сила в этом случае?

Пусть теперь модуль силы постоянен, а её направление может изменяться в процессе движения. Бусинка находится на расстоянии s от начала горки (см. рисунок 2).

3. При $F = |\vec{F}| = mg/2$ найдите минимальное значение s, при котором бусинка может преодолеть горку. Опишите как должно меняться направление силы $\vec{F}$, чтобы это стало возможным.

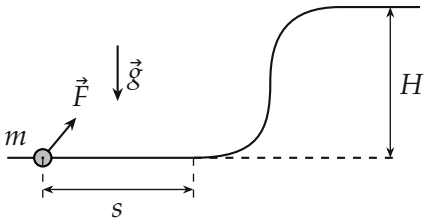


Рис. 2

▲ **Решение. Что происходит.** Проволока гладкая: её реакция перпендикулярна скорости и работы не совершает, поэтому кинетическая энергия бусинки равна работе тяжести и силы $\vec{F}$. Бусинка проходит горку, если эта энергия нигде не обращается в ноль. В пунктах 1–2 обе силы постоянны: их сумма $\vec{F}+m\vec{g}$ даёт геометрическое условие — горка должна лежать по одну сторону от прямой, перпендикулярной этой сумме. В пункте 3 сила поворачивается, и выгоднее всего направлять её по скорости.

Обозначения. $R = H/2$ — радиус четвертей; ось x вправо, y вверх, начало — начало горки. Первая четверть: центр $(0;R)$, от $(0;0)$ до $(R;R)$; вторая: центр $O_2(2R;R)$, от $(R;R)$ до $(2R;2R)$.

1. Условие прохождения. По теореме о кинетической энергии работа постоянных сил до точки $\vec{r} = (x;y)$ профиля

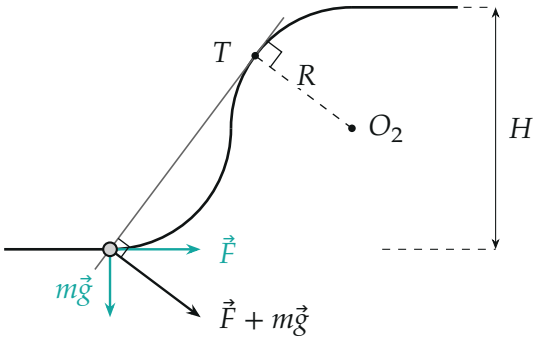
$$\frac{mv^2}{2} = (\vec{F} + m\vec{g}) \cdot \vec{r} \geqslant 0 \quad \text{во всех точках горки.}$$

2. Пункт 1: горизонтальная сила. $Fx - mgy \geqslant 0$, то есть $y \leqslant kx$, $k = F/mg$: горка лежит под прямой $y = kx$. Наименьшее k — у прямой, касающейся горки; на первой четверти $y \leqslant x$, так что касание — на второй. Расстояние от O_2 до прямой $kx - y = 0$ равно R:

$$\frac{|2k-1|R}{\sqrt{k^2+1}} = R \quad \Rightarrow \quad 3k^2 - 4k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4}{3}$$

(корень $k = 0$ — касание внизу окружности, вне горки). Точка касания $T(1{,}2R;\ 1{,}6R)$, и

$$F_{\min 1} = \frac{4}{3}mg.$$

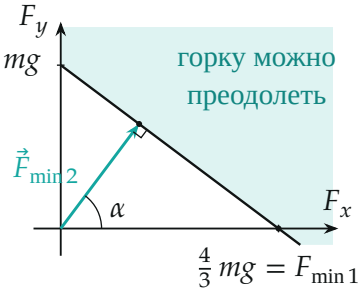


Критический случай пункта 1: прямая, перпендикулярная $\vec{F} + m\vec{g}$, касается горки в точке T.

Обратите внимание: самая трудная точка — не вершина, а T на высоте $0{,}8H$. По вершине вышло бы $F = mg$ — мало.

3. Пункт 2: любое направление. При $F_y < mg$ условие $F_x x + (F_y - mg)y \geqslant 0$ — горка под прямой с наклоном $\dfrac{F_x}{mg - F_y} \geqslant \dfrac{4}{3}$, то есть

$$3F_x + 4F_y \geqslant 4mg$$



Плоскость сил: допустимые силы — в закрашенной области.

($F_y \geqslant mg$ даёт заведомо большую силу $F \geqslant mg$). Модуль силы — расстояние от начала плоскости $(F_x; F_y)$; наименьшее — до прямой $3F_x + 4F_y = 4mg$:

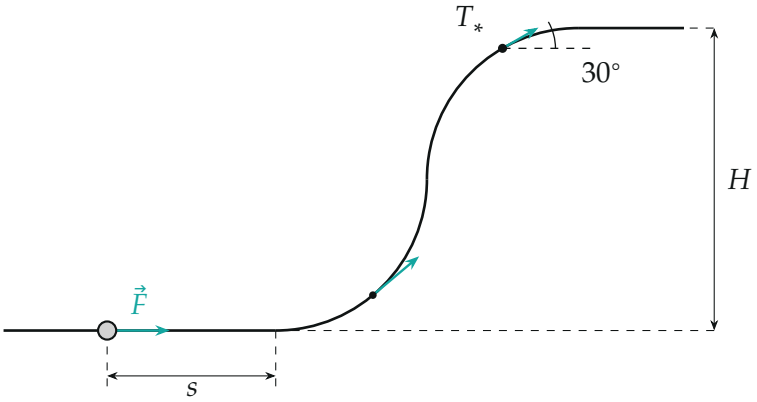
$$F_{\min 2} = \frac{4mg}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}mg, \qquad \operatorname{tg}\alpha_{opt} = \frac{4}{3}, \quad \alpha_{opt} = \arcsin\frac{4}{5} \approx 53^\circ.$$

Сила направлена вдоль касательной OT из пункта 1.

4. Пункт 3: поворачивающаяся сила. Работа силы на пути dl равна $\vec{F}\cdot d\vec{r} \leqslant F\,dl$, равенство — при силе по скорости. Значит, выгоднее всего направлять силу по касательной вперёд (бусинка движется только вперёд: слева проволока кончается). Тогда кинетическая энергия на пути l от старта

$$K(l) = F\,l - mg\,y(l), \qquad \frac{dK}{dl} = F - mg\sin\gamma,$$

γ — наклон проволоки. При $F = mg/2$ энергия убывает, пока $\gamma > 30^\circ$, и минимальна в точке T_* второй четверти, где $\gamma = 30^\circ$ (радиус O_2T_* составляет 60° с горизонталью).



Сила всё время направлена по касательной к проволоке вперёд. Положение T_* — точка, где наклон проволоки 30°.

5. Расчёт $s_{\min}$. Высота T_* и путь до неё:

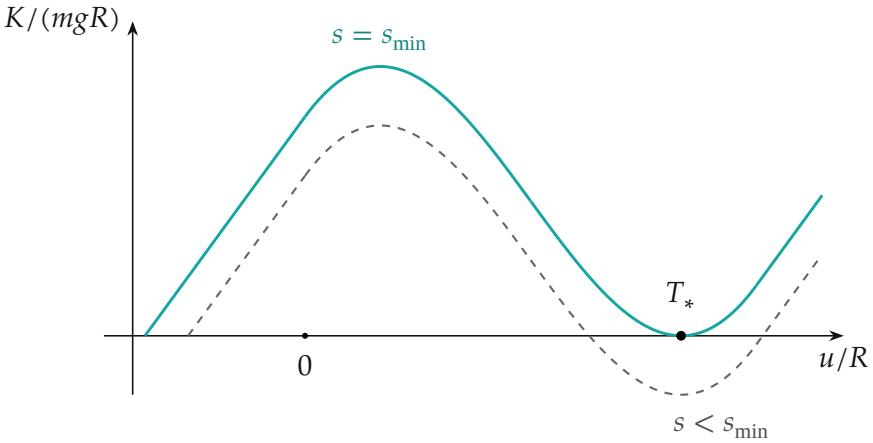
$$y_* = R\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad l_* = s + \frac{\pi R}{2} + \frac{\pi R}{3} = s + \frac{5\pi}{6}R.$$

Условие $K(T_*) \geqslant 0$:

$$\frac{mg}{2}\left(s + \frac{5\pi}{6}R\right) \geqslant mgR\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$s_{\min} = R\left(2 + \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{H}{2}\left(2 + \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}\right) \approx 0{,}56\,H.$$

Направление силы — всё время по касательной вперёд: горизонтально на прямом участке, на первой четверти угол с горизонтом растёт до 90°, на второй убывает до нуля.



Кинетическая энергия (в единицах mgR) вдоль пути и от начала горки: при $s = s_{\min}$ она касается нуля в T_*.

Обратите внимание: при $s = s_{\min}$ бусинка приходит в T_* с нулевой скоростью — это граничный случай; любое большее s даёт запас.

Проверка. Пункт 2: работа $\vec{F}_{\min 2} = \left(\frac{12}{25}; \frac{16}{25}\right) mg$ до точки $T(1{,}2R; 1{,}6R)$ равна $1{,}6\,mgR = mg\,y_T$ — в T энергия ровно ноль. Пункт 3: на вершине $K = \frac{mg}{2}(s_{\min} + \pi R) - 2mgR \approx 0{,}13\,mgR > 0$ — кроме T_*, энергия везде положительна.

Смысл: направляя силу по движению, берём от неё максимум работы, а разгон s покрывает крутой участок.

Ответ. 1) $F_{\min 1} = \frac{4}{3}mg$; 2) $F_{\min 2} = \frac{4}{5}mg$, $\alpha_{opt} = \arcsin\frac{4}{5} = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 53°$ (вдоль касательной к горке из начальной точки); 3) $s_{\min} = \frac{H}{2}\left(2 + \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}\right) \approx 0{,}56\,H$, сила всё время по касательной к проволоке вперёд.