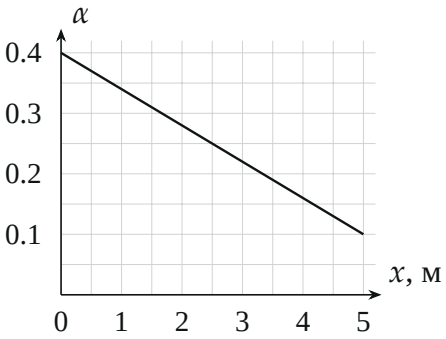
Теплообменник

Задача 1. [ВсОШ 2025-26, 9 класс, задача 4] Теплообменник состоит из двух коаксиальных труб длиной $L = 5$ м. По внутренней трубе в положительном направлении оси x течёт смесь воды и льда с массовым расходом $\mu_{\text{х}} = 0{,}70$ кг/с. По внешней трубе встречным потоком течёт горячая вода с $\mu_{\text{г}} = 0{,}50$ кг/с, температура $T_{\text{г}}$ которой при $x = L$ составляет 60 °C. Устройство теплообменника таково, что зависимость массовой доли $\alpha(x)$ льда от координаты x имеет вид, показанный на графике. Площадь поперечного сечения внутренней трубы постоянна и равна $S = 100$ см^2.



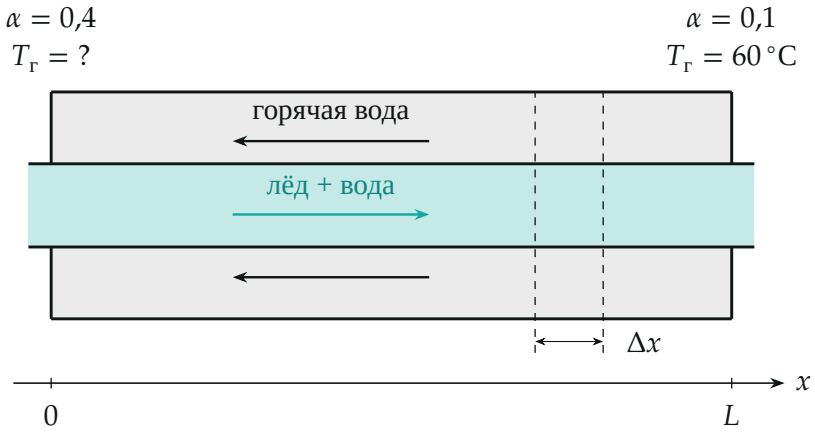
Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), плотности воды и льда равны $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м^3 и $\rho_{\text{л}} = 900$ кг/м^3 соответственно. Теплопотерями в окружающую среду и теплоёмкостью стенок пренебречь.

1. Найдите температуру горячей воды $T_{\text{г}}$ в сечении с координатой $x = 0$.
2. Постройте график зависимости температуры $T_{\text{г}}(x)$ горячей воды от координаты.
3. Получите зависимость скорости $v(x)$ смеси воды и льда от координаты. Считайте, что скорость течения смеси одинакова по всему поперечному сечению.

▲ **Решение. Что происходит.** Пока в смеси есть лёд, её температура 0 °C, и всё тепло горячей воды идёт на плавление льда: доля льда α убывает вдоль трубы. Тепловой баланс малого участка связывает остывание горячей воды с таянием льда. Скорость смеси даёт постоянство массового расхода: плотность смеси зависит от доли льда.

Обозначения. Горячая вода течёт против оси x: входит при $x = L$ (60 °C), выходит при $x = 0$. По графику $\alpha(0) = 0{,}4$, $\alpha(L) = 0{,}1 > 0$ — лёд есть по всей длине, температура смеси везде 0 °C; прямая через эти точки:

$$\alpha(x) = 0{,}4 - 0{,}06\,x \qquad (x \text{ в метрах}).$$



Смесь течёт вправо, горячая вода — навстречу; выделен малый участок Δx.

1. Тепловой баланс участка Δx. Режим установившийся, теплопотерь нет, смесь не нагревается. За время $\Delta\tau$ через участок проходит смесь массой $\mu_{\text{х}}\Delta\tau$, и на нём тает лёд массой $-\mu_{\text{х}}\Delta\tau\,\Delta\alpha$. Горячая вода массой $\mu_{\text{г}}\Delta\tau$ проходит его справа налево и остывает на $\Delta T_{\text{г}} = T_{\text{г}}(x + \Delta x) - T_{\text{г}}(x)$. Отданная ею теплота идёт на плавление:

$$c\,\mu_{\text{г}}\,\Delta T_{\text{г}} = -\lambda\,\mu_{\text{х}}\,\Delta\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T_{\text{г}}}{\Delta x} = -\frac{\lambda\mu_{\text{х}}}{c\,\mu_{\text{г}}}\,\frac{\Delta\alpha}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta T_г}{\Delta x} = \frac{3{,}35 \cdot 10^5 \cdot 0{,}70}{4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}50} \cdot 0{,}06\ \frac{\text{К}}{\text{м}} \approx 6{,}7\ \frac{^\circ\text{C}}{\text{м}}.$$

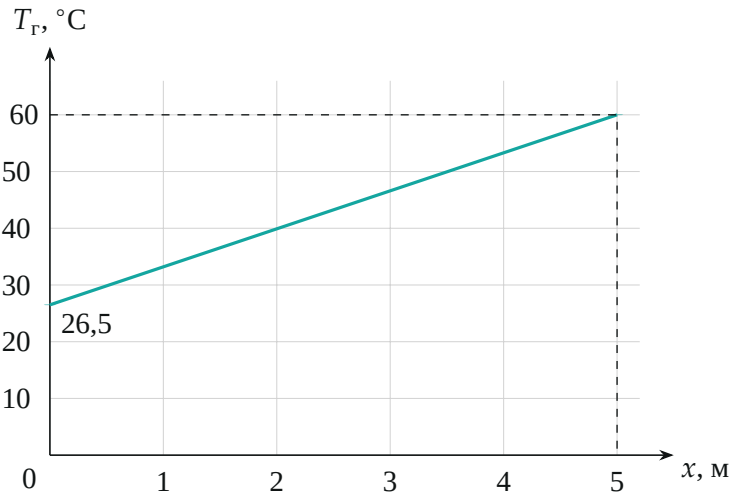
Наклон $\alpha(x)$ постоянен, поэтому $T_г$ растёт с x линейно.

2. Пункт 1. От $x = L$ до $x = 0$ вода остывает на $6{,}7 \cdot 5 = 33{,}5\,^\circ$C:

$$T_г(0) = 60\,^\circ\text{C} - 33{,}5\,^\circ\text{C} = 26{,}5\,^\circ\text{C}$$

— то же даёт баланс всей трубы $c\mu_г(T_г(L) - T_г(0)) = \lambda\mu_х(\alpha(0) - \alpha(L))$.

3. Пункт 2. График — прямая от $(0;\ 26{,}5\,^\circ\text{C})$ до $(5\text{ м};\ 60\,^\circ\text{C})$: $T_г(x) = 26{,}5\,^\circ\text{C} + 6{,}7\ \frac{^\circ\text{C}}{\text{м}} \cdot x$.

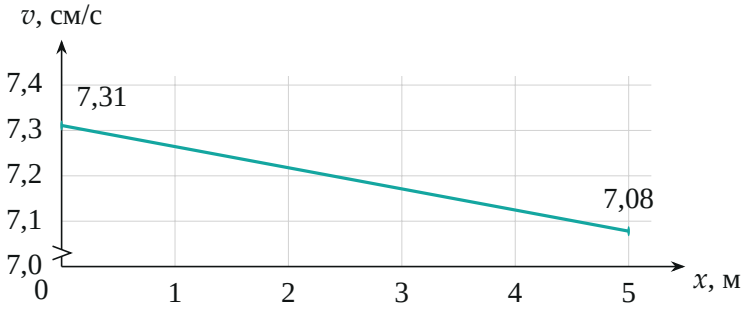


Температура горячей воды: входит при $x = 5$ м и остывает до $26{,}5\,^\circ$C.

4. Пункт 3: скорость смеси. Порция смеси массой Δm — лёд $\alpha\Delta m$ и вода $(1-\alpha)\Delta m$, её объём $\Delta V = \dfrac{\alpha\Delta m}{\rho_л} + \dfrac{(1-\alpha)\Delta m}{\rho_в}$. Массовый расход одинаков во всех сечениях: $\mu_х = S\rho v = Sv\,\Delta m/\Delta V$, откуда

$$v(x) = \frac{\mu_х}{S}\left(\frac{\alpha(x)}{\rho_л} + \frac{1-\alpha(x)}{\rho_в}\right) = \frac{\mu_х}{S\rho_в\rho_л}\Big(0{,}6\,\rho_л + 0{,}4\,\rho_в - 0{,}06\,x\,(\rho_в - \rho_л)\Big).$$

При $\mu_х/S = 70$ кг/(м$^2\cdot$с): $v(x) \approx (7{,}31 - 0{,}047\,x)\cdot 10^{-2}$ м/с, от 7,3 до 7,1 см/с.



Скорость смеси (ось v начинается с 7,0 см/с): к выходу льда меньше, смесь плотнее и течёт медленнее.

Обратите внимание: постоянен массовый расход, а не скорость: лёд, превращаясь в более плотную воду, уменьшает объём смеси, и она замедляется (на 3 %).

Проверка. Мощность плавления $\lambda\mu_{\text{х}} \cdot 0{,}30 \approx 70{,}4$ кВт равна $c\mu_{\text{г}} \cdot 33{,}5$ К $\approx 70{,}4$ кВт; остыв до 0 °C, вода отдала бы 126 кВт — больше нужного, так что она везде теплее смеси. Скорость лежит между пределами: чистая вода — 7,0 см/с, чистый лёд — 7,8 см/с.

Смысл: тепло горячей воды целиком уходит в лёд; лёд тает равномерно по длине, поэтому температура горячей воды меняется линейно.

Ответ. 1) $T_{\text{г}}(0) = 26{,}5\,^\circ\text{C}$; 2) прямая $T_{\text{г}}(x) = 26{,}5\,^\circ\text{C} + 6{,}7\,\dfrac{^\circ\text{C}}{\text{м}} \cdot x$; 3) $v(x) = \dfrac{\mu_{\text{х}}}{S\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}}(0{,}6\rho_{\text{л}} + 0{,}4\rho_{\text{в}} - 0{,}06x(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})) \approx (7{,}31 - 0{,}047x) \cdot 10^{-2}$ м/с (x в метрах).