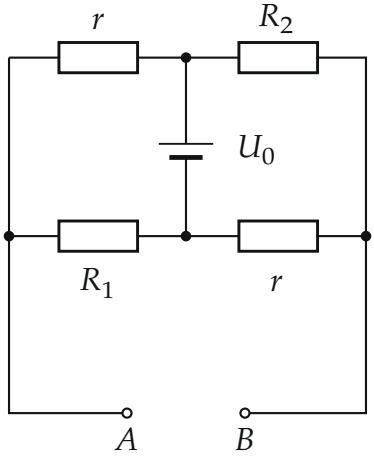
Мосты

Задача 1. [ВсОШ 2025-26, 9 класс, задача 5] Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, состоит из резисторов сопротивлениями R_1, R_2, r ($R_1 \neq R_2$) и идеального источника постоянного напряжения U_0. К выводам A и B подключают второй идеальный источник постоянного напряжения. При одной его полярности на резисторах R_1 и R_2 мощность не выделяется, а при другой полярности на них выделяются одинаковые ненулевые мощности.



Считая заданными сопротивления R_1, R_2 и напряжение U_0, определите:

1. напряжение источника, подключаемого к A и B;
2. сопротивление r;
3. показание R омметра, подключенного к выводам A и B, если ЭДС и внутреннее сопротивление омметра равны $\mathcal{E}_0$ и r_0.

Омметр показывает отношение напряжения на его выводах к силе тока, протекающего через него.

▲ **Решение. Что происходит.** Четыре резистора образуют мост: U_0 подключён к двум его вершинам, A и B — две другие. Нулевая мощность на R_1 и R_2 — нулевые токи, значит, концы каждого из них при одном

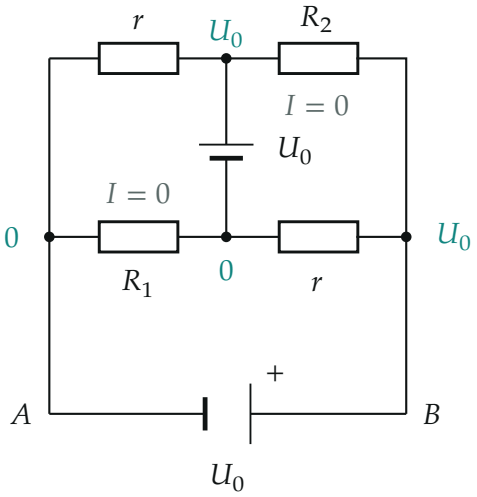
потенциале; это сразу даёт напряжение. Обратную полярность разбираем наложением: цепь линейна. Для омметра заменяем цепь между A и B эквивалентным источником.

Обозначения. T — плюс источника U_0 (длинная пластина), M — минус; $\varphi_M = 0$, $\varphi_T = U_0$. По схеме r соединяет A с T, R_1 — A с M, R_2 — T с B, второе r — M с B.

1. Пункт 1. Токов через R_1 и R_2 нет, по закону Ома напряжения на них нулевые:

$$\varphi_A = \varphi_M = 0, \quad \varphi_B = \varphi_T = U_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_B - \varphi_A = U_0.$$

Источник на A, B — напряжение U_0, плюсом к B.

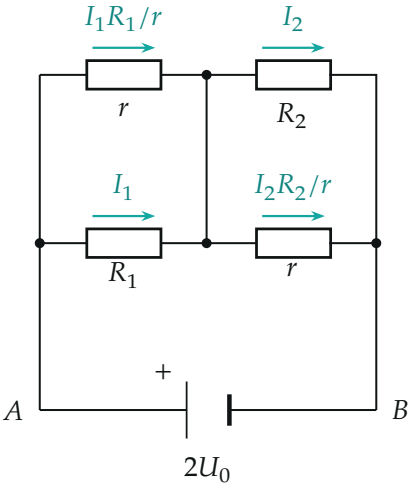


Потенциалы узлов при первой полярности: токи через R_1 и R_2 равны нулю.

2. Пункт 2: наложение. При обратной полярности $\varphi_B - \varphi_A = -U_0$. Это сумма двух состояний: схемы пункта 1 ($+U_0$, токов в R_1, R_2 нет) и добавочной схемы, где U_0 заменён перемычкой, а на A, B действует $-2U_0$. Значит, токи I_1, I_2 через R_1, R_2 целиком дают добавочная схема. В ней T и M — один узел N; между A и N параллельно R_1 и r, между N и B — R_2 и r. Ток через r в паре равен $I_1 R_1/r$ (или $I_2 R_2/r$), а общий

ток I одинаков для обеих пар (сохранение заряда в узлах):

$$I = I_1\left(1+\frac{R_1}{r}\right) = I_2\left(1+\frac{R_2}{r}\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2+r}{R_1+r}.$$



Добавочная схема: U_0 заменён перемычкой, на A и B — $2U_0$ (плюс у A).

3. Равенство мощностей. $I_1^2R_1 = I_2^2R_2$:

$$(R_2+r)\sqrt{R_1} = (R_1+r)\sqrt{R_2},$$

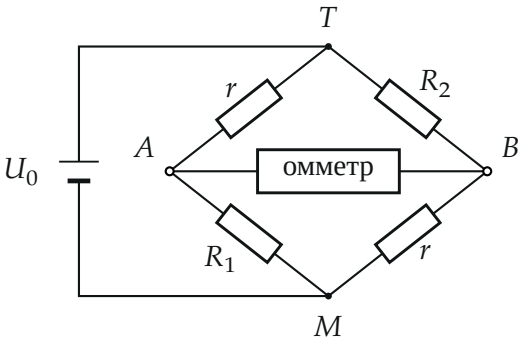
$$\sqrt{R_1R_2}\,(\sqrt{R_2}-\sqrt{R_1}) = r\,(\sqrt{R_2}-\sqrt{R_1}) \quad\Rightarrow\quad r = \sqrt{R_1R_2}.$$

Обратите внимание: сократить можно только при $R_1 \neq R_2$ — для этого условие и дано.

4. Пункт 3: эквивалентный источник. Цепь между A и B заменим источником U^* с сопротивлением r^*. При разомкнутых A, B они — середины делителей между T и M:

$$\varphi_A = \frac{U_0R_1}{R_1+r}, \qquad \varphi_B = \frac{U_0r}{R_2+r}; \qquad \varphi_A = \varphi_B \iff R_1R_2 = r^2,$$

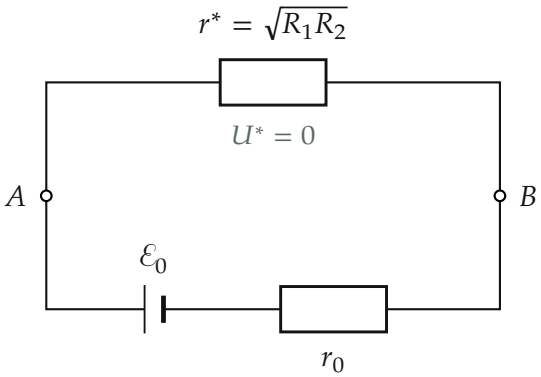
так что $U^* = 0$.



Та же цепь как мост: при $r^2 = R_1R_2$ он сбалансирован ($r/R_1 = R_2/r$).

Сопротивление при закороченном U_0 — две параллельные пары последовательно:

$$r^* = \frac{R_1 r}{R_1 + r} + \frac{R_2 r}{R_2 + r} = \frac{R_1\sqrt{R_2} + R_2\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}} = \sqrt{R_1 R_2}.$$



омметр

Омметр ($\mathcal{E}_0$, r_0) на цепи, эквивалентной резистору r^*.

5. Показание омметра. Ток $I = \mathcal{E}_0/(r_0 + r^*)$, напряжение на выводах $U = Ir^*$, поэтому

$$R = \frac{U}{I} = r^* = \sqrt{R_1 R_2}$$

при любых $\mathcal{E}_0$, r_0 и любой полярности. Обратите внимание: это верно только потому, что $U^* = 0$; у несбалансированного моста показание было бы $r^* + U^*/I$ и зависело бы от омметра.

Проверка. Пример $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $r = 2$ Ом, $U_0 = 10$ В (узловые потенциалы): при $+10$ В токи в R_1, R_2 нулевые, при -10 В — 6,67 и 3,33 А, мощности по 44,4 Вт; омметр показывает 2 Ом $= \sqrt{1 \cdot 4}$. Условие баланса моста $r/R_1 = R_2/r$ совпало с условием равных мощностей.

Смысл: сбалансированный мост не чувствует источник U_0 со стороны диагонали AB и снаружи выглядит как резистор $\sqrt{R_1 R_2}$.

Ответ. 1) U_0 ($\varphi_B - \varphi_A = U_0$, плюс к B); 2) $r = \sqrt{R_1 R_2}$; 3) $R = \sqrt{R_1 R_2}$ при любой полярности подключения омметра.