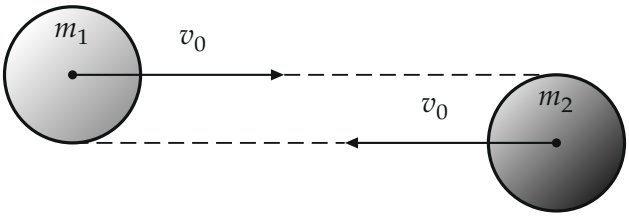
Нецентральное соударение шаров

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 10 класс, задача 1] «Нецентральное соударение шаров».

Гладкий шар массой m_1 налетает на гладкий шар массой m_2 такого же диаметра, движущийся с той же скоростью $v_0 = 8{,}7$ м/с в противоположном направлении так, как показано на рисунке. В результате упругого соударения первый шар отскакивает в направлении, перпендикулярном первоначальному направлению его движения.



1. Найдите скорость v_1 первого шара после соударения. Дайте ответ в м/с с округлением до десятых долей.
2. Найдите скорость v_2 второго шара после соударения. Дайте ответ в м/с с округлением до десятых долей.
3. Найдите отношение m_1/m_2 масс шаров. Дайте ответ с округлением до десятых долей.
4. На какой угол α повернётся вектор скорости второго шара в результате соударения с первым? Дайте ответ в градусах с округлением до целого числа.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на упругий удар гладких шаров. Гладкие шары толкают друг друга только вдоль линии, соединяющей их центры в момент удара. Поэтому составляющие скоростей поперёк этой линии не меняются, а вдоль неё происходит обычный лобовой упругий удар: сохраняются импульс и энергия. Главное — найти, под каким углом к линии центров летели шары. По рисунку линия движения центра одного шара касается другого шара, отсюда угол 30°.

Обозначения. r — радиус шаров; φ — угол между скоростью $\vec{v}_0$ первого шара и линией центров; ось x — вдоль линии центров от первого

шара ко второму, ось y — перпендикулярно ей; $k = m_1/m_2$; u_{1x}, u_{2x} — проекции скоростей на ось x после удара.

1. Геометрия удара. Прямые, по которым движутся центры шаров, отстоят друг от друга на r (центр первого шара идёт по касательной ко второму шару, рис. условия). В момент удара шары касаются, расстояние между центрами $2r$ (рис. 1). Из прямоугольного треугольника с катетом r и гипотенузой $2r$:

$$\sin\varphi = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}, \qquad \varphi = 30^\circ.$$

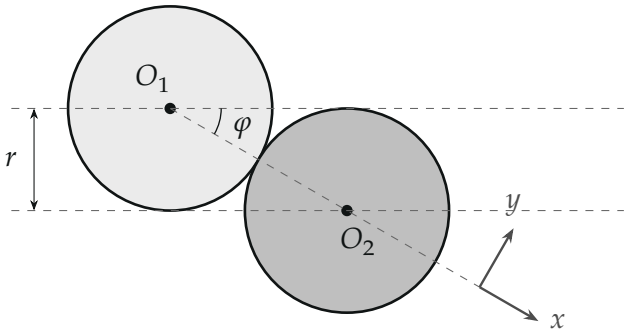


Рис. 1. Момент удара: центры O_1 и O_2 на расстоянии $2r$, их линии движения — на расстоянии r; ось x — по линии центров

2. Проекции скоростей до удара. Первый шар: $v_{0x} = v_0\cos\varphi$, $v_{0y} = v_0\sin\varphi$. Второй летит в противоположную сторону: $-v_0\cos\varphi$ и $-v_0\sin\varphi$ (рис. 2).

3. Что сохраняется по оси y. Сила взаимодействия гладких шаров направлена по линии центров, то есть по оси x. Второй закон Ньютона для каждого шара в проекции на ось y: силы нет — проекция скорости не меняется:

$$v_{1y} = v_0\sin\varphi, \qquad v_{2y} = -v_0\sin\varphi.$$

4. Пункт 1: скорость первого шара. После удара первый шар летит перпендикулярно $\vec{v}_0$, то есть под углом $90^\circ - \varphi = 60^\circ$ к оси y (рис. 2, справа). Его проекция на ось y равна $v_1\cos\varphi$, а на ось x —

$u_{1x} = -v_1 \sin\varphi$. Из шага 3:

$$v_1 \cos\varphi = v_0 \sin\varphi \quad \Longrightarrow \quad v_1 = v_0 \operatorname{tg}\varphi = \frac{v_0}{\sqrt{3}} = \frac{8{,}7}{1{,}732} \approx 5{,}0 \text{ м/с}.$$

Тогда $u_{1x} = -v_1 \sin\varphi = -v_0 \dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = -\dfrac{v_0 \cos\varphi}{3}$: вдоль линии центров первый шар отскочил назад со скоростью втрое меньше прежней.

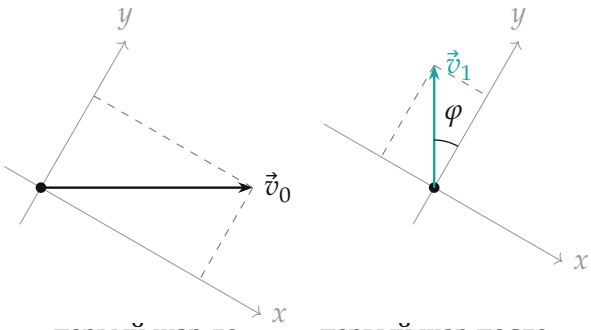


Рис. 2. Скорость первого шара до и после удара и её проекции на оси x, y (пунктир). Проекция на y одна и та же, после удара скорость перпендикулярна $\vec{v}_0$

5. Пункт 3: лобовой удар вдоль оси x. Вдоль линии центров — обычный упругий центральный удар: до удара проекции c и $-c$, где $c = v_0 \cos\varphi$. Закон сохранения импульса системы двух шаров в проекции на x и закон сохранения энергии (энергия движения вдоль y у каждого шара не меняется, поэтому сохраняется и энергия «x-движения»):

$$\begin{cases} m_1 c - m_2 c = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}, \\ m_1 c^2 + m_2 c^2 = m_1 u_{1x}^2 + m_2 u_{2x}^2. \end{cases}$$

Решение этой системы (кроме тривиального $u_{1x} = c$) — известная формула упругого удара:

$$u_{1x} = c\,\frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} = c\,\frac{k-3}{k+1}, \qquad u_{2x} = c\,\frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = c\,\frac{3k-1}{k+1}.$$

Подставим $u_{1x} = -c/3$ из шага 4:

$$\frac{k-3}{k+1} = -\frac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad 3k - 9 = -k - 1 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{m_1}{m_2} = 2{,}0.$$

6. Пункт 2: скорость второго шара. При $k = 2$ проекции скорости второго шара после удара:

$$u_{2x} = \frac{5c}{3} = \frac{5}{3}v_0\cos\varphi = \frac{5v_0}{2\sqrt{3}}, \qquad v_{2y} = -v_0\sin\varphi = -\frac{v_0}{2}.$$

По теореме Пифагора

$$v_2 = v_0\sqrt{\frac{25}{12} + \frac{1}{4}} = v_0\sqrt{\frac{7}{3}} = 8{,}7 \cdot 1{,}528 \text{ м/с} \approx 13{,}3 \text{ м/с}.$$

7. Пункт 4: поворот скорости второго шара. Перейдём к осям рисунка условия: X — по $\vec{v}_0$ первого шара, Y — вверх. Ось x повёрнута относительно X на φ вниз, поэтому проекции скорости второго шара после удара:

$$v_{2X} = u_{2x}\cos\varphi + v_{2y}\sin\varphi = \frac{5v_0}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{v_0}{2}\cdot\frac{1}{2} = v_0,$$

$$v_{2Y} = -u_{2x}\sin\varphi + v_{2y}\cos\varphi = -\frac{5v_0}{4\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}\,v_0}{4} = -\frac{2v_0}{\sqrt{3}}.$$

До удара второй шар летел против оси X, после — вперёд по X и вниз (рис. 3). Угол новой скорости с осью X: $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\gamma = 49{,}1°$. Вектор скорости повернулся на

$$\alpha = 180° - \gamma = 180° - \operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 130{,}9° \approx 131°.$$

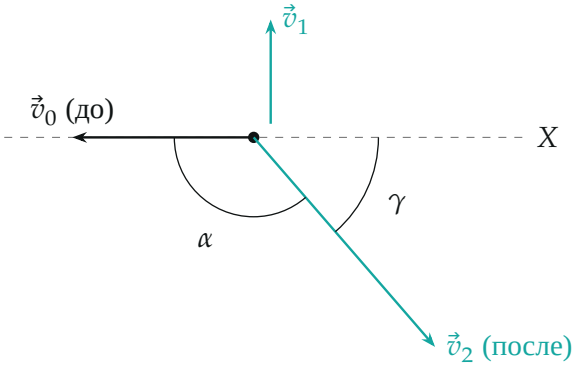


Рис. 3. Скорости после удара (в масштабе): $v_1 = v_0/\sqrt{3}$ вверх, $v_2 = v_0\sqrt{7/3}$; вектор скорости второго шара повернулся на угол α

Обратите внимание. Энергия сохраняется для всего движения, но удобнее записать её только для проекций на x: составляющие по y не меняются, и их энергия сокращается.

Проверка. Второй способ — законы сохранения в осях рисунка условия при $m_1 = 2m_2$. Импульс по X: до $2m_2v_0 - m_2v_0 = m_2v_0$, после $2m_2 \cdot 0 + m_2v_{2X} = m_2v_0$ — сходится. По Y: до 0, после $2m_2 \cdot \dfrac{v_0}{\sqrt{3}} - m_2\dfrac{2v_0}{\sqrt{3}} = 0$ — сходится. Энергия: до $\dfrac{3m_2v_0^2}{2}$, после $\dfrac{m_2}{2}\left(2 \cdot \dfrac{v_0^2}{3} + \dfrac{7v_0^2}{3}\right) = \dfrac{3m_2v_0^2}{2}$ — сходится. Размерности ответов — м/с, отношение масс безразмерно.

Итог: всё решение держится на одном факте — гладкие шары обмениваются импульсом только вдоль линии центров.

Ответ. 1) $v_1 = v_0 \operatorname{tg} 30^\circ \approx 5{,}0$ м/с; 2) $v_2 = v_0\sqrt{7/3} \approx 13{,}3$ м/с; 3) $m_1/m_2 = 2{,}0$; 4) $\alpha \approx 131^\circ$.