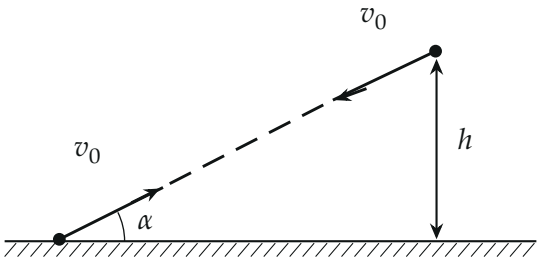
Два камня

Задача 2. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 10 класс, задача 2] «Два камня».

Два камня бросают одновременно навстречу друг другу с одинаковыми начальными скоростями v_0 вдоль прямой, наклонённой под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Первый камень бросают с горизонтальной поверхности земли, а второй — с высоты $h = 100$ м (см. рисунок). На землю камни падают одновременно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



1. Найдите время t полёта камней. Дайте ответ в секундах с округлением до сотых долей.
2. Найдите скорость v_0. Дайте ответ в м/с с округлением до десятых долей.
3. Чему равен модуль вектора перемещения первого камня S_1 за время его полёта? Дайте ответ в метрах с округлением до целого числа.
4. Чему равен модуль вектора перемещения второго камня S_2 за время его полёта? Дайте ответ в метрах с округлением до целого числа.
5. На каком расстоянии S друг от друга приземляются камни? Дайте ответ в метрах с округлением до десятых долей.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение тела, брошенного под углом к горизонту. Оба камня летят с ускорением $\vec{g}$, поэтому движение раскладываем на равномерное по горизонтали и равноускоренное по вертикали. Вертикальные составляющие скоростей у камней

противоположны: первый летит вверх, второй — вниз. Условие «упали одновременно» даёт уравнение на время, а горизонтальные смещения у камней одинаковы — отсюда и все перемещения.

Обозначения. Ось x — горизонтально от точки броска первого камня ко второму, ось y — вертикально вверх, начало — в точке броска первого камня; L — горизонтальное расстояние между точками бросания; t — время полёта.

1. Начальные условия. Второй камень брошен из точки на той же прямой под углом α, на высоте h, поэтому $L = h\operatorname{ctg}\alpha$. Проекции начальных скоростей (рис. 1): у первого $(v_0\cos\alpha;\ v_0\sin\alpha)$, у второго — навстречу: $(-v_0\cos\alpha;\ -v_0\sin\alpha)$.

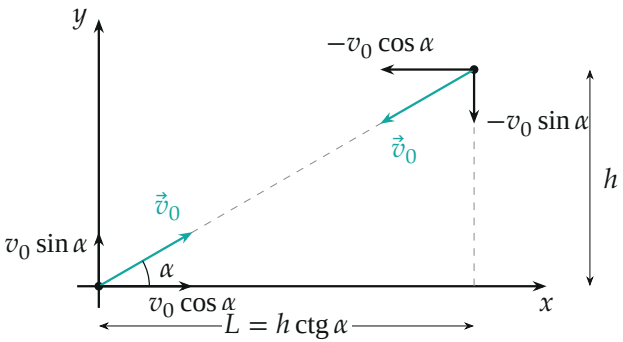


Рис. 1. Оси и проекции начальных скоростей камней

2. Пункт 1: время полёта. Кинематическое уравнение равноускоренного движения в проекции на ось y для каждого камня; в момент падения оба на земле, $y = 0$:

$$\begin{cases} 0 = v_0\sin\alpha\cdot t - \dfrac{gt^2}{2}, \\ 0 = h - v_0\sin\alpha\cdot t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Сложим уравнения — слагаемые с v_0 сократятся:

$$h - gt^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{10}\text{ с} \approx 3{,}16\text{ с}.$$

3. Пункт 2: начальная скорость. Из первого уравнения ($t \neq 0$):

$$v_0 \sin\alpha = \frac{gt}{2} \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \frac{gt}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{gh}}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1000}}{2\cdot 0{,}5}\ \text{м/с} \approx 31{,}6\ \text{м/с}.$$

4. Пункт 3: перемещение первого камня. Первый камень стартовал с земли и упал на землю, так что его перемещение горизонтально. По оси x движение равномерное:

$$S_1 = v_0 \cos\alpha \cdot t = \frac{gt^2}{2}\operatorname{ctg}\alpha = \frac{h}{2}\operatorname{ctg}\alpha = 50\sqrt{3}\ \text{м} \approx 86{,}6\ \text{м} \approx 87\ \text{м}.$$

5. Пункт 4: перемещение второго камня. По горизонтали второй камень сместился на ту же величину $v_0 \cos\alpha \cdot t = S_1$ (та же горизонтальная скорость и то же время), только в другую сторону, а по вертикали — на h вниз (рис. 2). Модуль перемещения:

$$S_2 = \sqrt{S_1^2 + h^2} = \frac{h}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 4} = 50\sqrt{7}\ \text{м} \approx 132\ \text{м}.$$

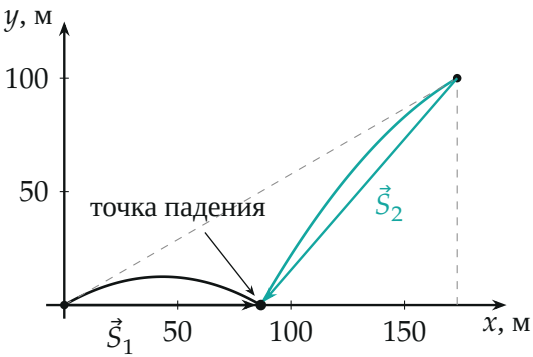


Рис. 2. Траектории камней, построенные по формулам при $v_0 = 31{,}6$ м/с: обе приходят в одну точку $x = 86{,}6$ м. Векторы перемещений $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$

6. Пункт 5: расстояние между точками падения. Первый камень

упал на $x_1 = S_1$, второй — на $x_2 = L - S_1$:

$$S = |x_2 - x_1| = L - 2S_1 = h\operatorname{ctg}\alpha - 2\cdot\frac{h}{2}\operatorname{ctg}\alpha = 0.$$

Камни падают в одну и ту же точку (с точностью до десятых — 0,0 м).

7. Почему так вышло — второй способ. Перейдём в систему отсчёта, свободно падающую с ускорением $\vec{g}$ (рис. 3). В ней оба камня движутся равномерно по прямым: каждый — со своей начальной скоростью $\vec{v}_0$, то есть по одной и той же наклонной прямой навстречу друг другу со скоростью сближения $2v_0$. Расстояние между ними $\dfrac{h}{\sin\alpha}$, и они встретятся через

$$t_{\text{вст}} = \frac{h}{2v_0\sin\alpha} = \frac{100}{2\cdot 31{,}6\cdot 0{,}5}\ \text{с} = 3{,}16\ \text{с} = t.$$

Встреча — одно событие для любой системы отсчёта: в земной системе камни в момент t оказываются в одной точке, и это как раз точка на земле. Отсюда $S = 0$ без расчёта координат.

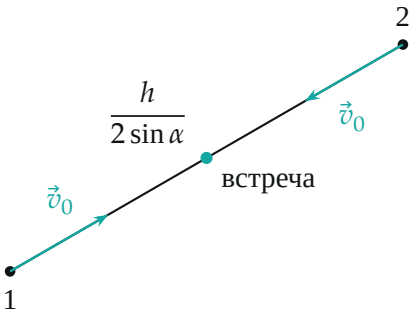


Рис. 3. В свободно падающей системе отсчёта камни летят равномерно по одной прямой навстречу друг другу и встречаются посередине

Обратите внимание. В пункте 3 спрашивают модуль перемещения, а не путь по траектории: путь по параболе длиннее 87 м.

Проверка. Размерности: $\sqrt{h/g}$ — с, $\sqrt{gh}$ — м/с. Подстановка: первый камень в момент $t = 3{,}162$ с имеет $y = 15{,}81\cdot 3{,}162 - 5\cdot 10 = 0$, второй

— $y = 100 - 50 - 50 = 0$ — оба на земле. Предел: при $\alpha \to 90°$ (камни на одной вертикали) $S_1 \to 0$, $S_2 \to h$ — первый взлетел и упал на место, второй упал отвесно туда же.

Итог: одинаковые скорости навстречу по одной прямой означают встречу посередине в падающей системе — поэтому камни падают в одну точку.

Ответ. 1) $t = \sqrt{h/g} \approx 3{,}16$ с; 2) $v_0 = \dfrac{\sqrt{gh}}{2\sin\alpha} \approx 31{,}6$ м/с; 3) $S_1 = \dfrac{h}{2}\operatorname{ctg}\alpha \approx 87$ м; 4) $S_2 = \dfrac{h}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 4} \approx 132$ м; 5) $S = 0{,}0$ м.