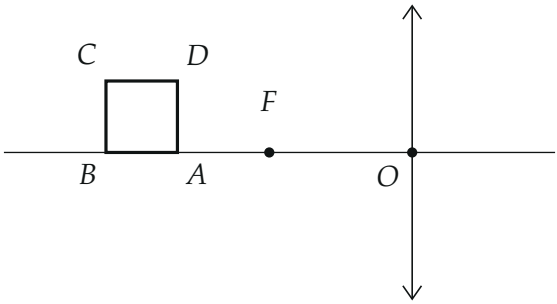
# Квадрат и линза

**Задача 3.** [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 10 класс, задача 3] «Квадрат и линза».

Квадратный предмет $ABCD$ расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы, как показано на рисунке. Длина стороны изображения $A'B'$ равна длине стороны предмета $AB$. Поперечное увеличение линзы для стороны $BC$ равно $\Gamma_1 = 0{,}8$. Лучи, падающие от предмета на линзу, считайте параксиальными.




1. Чему равно поперечное увеличение линзы $\Gamma_2$ для стороны $AD$? Дайте ответ с округлением до тысячных долей.
2. Определите отношение длины изображения $C'D'$ стороны $CD$ к длине самой стороны $CD$. Дайте ответ с округлением до тысячных долей.
3. Найдите отношение $k$ площади изображения предмета к площади самого предмета. Дайте ответ с округлением до тысячных долей.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на формулу тонкой линзы для протяжённого предмета. Вертикальные стороны $AD$ и $BC$ стоят на разных расстояниях от линзы и увеличиваются по-разному; сторона $AB$ лежит на оси, и её изображение тоже на оси. Изображение квадрата — прямоугольная трапеция: прямой отрезок линза переводит в прямой отрезок. Условие $A'B' = AB$ связывает положение квадрата с фокусом, и после этого все увеличения выражаются через одно $\Gamma_1$.

**Обозначения.** $f$ — фокусное расстояние; $x$ — сторона квадрата; $a = OA$ — расстояние от линзы до ближней стороны $AD$, тогда $OB = a +$

$x$; $b = OA'$ и $b' = OB'$ — расстояния до изображений точек $A$ и $B$ (действительные, за линзой).

**1. Формула линзы для точек $A$ и $B$.** Обе точки на оси, формула тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \qquad \frac{1}{a+x} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f}.$$

Ближняя точка $A$ даёт более далёкое изображение, поэтому $b > b'$, и условие $A'B' = AB$ означает $b - b' = x$.

**2. Решаем систему.** Вычтем уравнения:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x} = \frac{1}{b'} - \frac{1}{b} \;\Rightarrow\; \frac{x}{a(a+x)} = \frac{b-b'}{bb'} = \frac{x}{bb'} \;\Rightarrow\; bb' = a(a+x).$$

Подставим $b = b' + x$: $b'(b'+x) = a(a+x)$. Функция $y(y+x)$ при $y > 0$ возрастает, значит, единственное решение

$$b' = a, \qquad b = a + x.$$

Изображение «зеркально» предмету: $B'$ стоит там, где стоял бы $A$, а $A'$ — где $B$ (рис. 1). Из формулы линзы $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a+x} = \dfrac{1}{f}$.

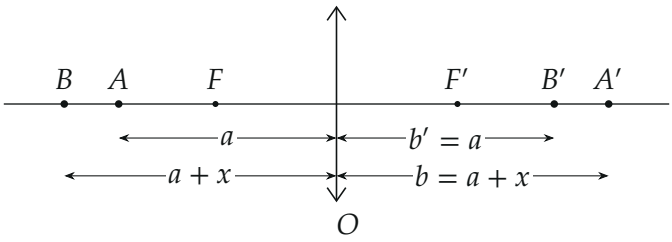



*Рис. 1. Точки $A$, $B$ и их изображения: $OB' = OA$, $OA' = OB$ (построено при $\Gamma_1 = 0{,}8$: $a = 1{,}8f$, $x = 0{,}45f$)*

**3. Пункт 1: увеличения сторон $BC$ и $AD$.** Поперечное увеличение — отношение расстояния до изображения к расстоянию до предмета. Для $BC$ (на расстоянии $a + x$, изображение на $b' = a$) и для $AD$ (на $a$, изоб-

ражение на $b = a + x$):

$$\Gamma_1 = \frac{a}{a+x}, \qquad \Gamma_2 = \frac{a+x}{a} = \frac{1}{\Gamma_1} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}250.$$

Ближняя сторона увеличивается, дальняя уменьшается, а произведение увеличений равно единице. При $\Gamma_1 = 0{,}8$: $x = a\left(\frac{1}{\Gamma_1} - 1\right) = 0{,}25a$, $a = 1{,}8f$, $x = 0{,}45f$ — так построены рисунки.

**4. Построение изображения.** Луч от $D$, идущий параллельно оси, после линзы проходит через задний фокус $F'$; луч через оптический центр $O$ не преломляется (рис. 2). Их пересечение — $D'$. Тот же луч, параллельный оси, идёт и по продолжению стороны $DC$ — он содержит все точки этой стороны. Значит, изображения всех точек стороны $CD$ лежат на одной прямой — преломлённом луче через $F'$, и $C'D'$ — отрезок этой прямой. Изображение квадрата — трапеция $A'B'C'D'$ с параллельными сторонами $A'D'$ и $B'C'$.

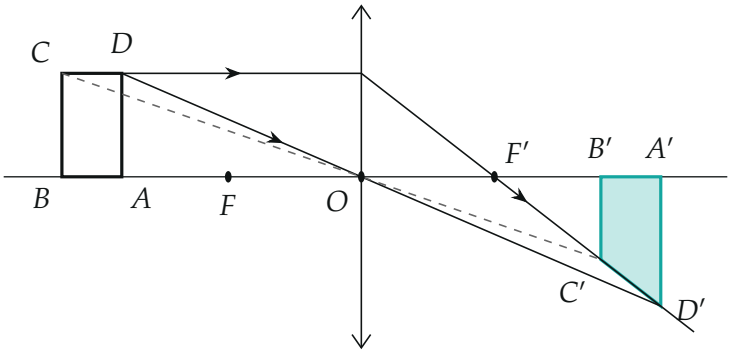



*Рис. 2. Построение изображения: луч $DC$, параллельный оси, после линзы идёт через $F'$; лучи через $O$ не преломляются (сплошной — от $D$, пунктир — от $C$). Изображение — трапеция $A'B'C'D'$*

**5. Пункт 2: длина $C'D'$.** Изображение перевёрнуто: $A'D' = \Gamma_2 x$, $B'C' = \Gamma_1 x$, обе стороны перпендикулярны оси, расстояние между ними $A'B' = x$ (рис. 3). Отрезок $C'D'$ — гипотенуза прямоугольного тре-

угольника с катетами $x$ и $(\Gamma_2 - \Gamma_1)x$. По теореме Пифагора:

$$\frac{C'D'}{CD} = \sqrt{1 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\Gamma_1} - \Gamma_1\right)^2} = \sqrt{1 + 0{,}45^2} \approx 1{,}097.$$

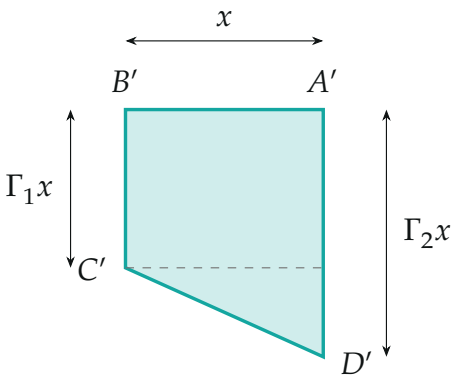



*Рис. 3. Изображение квадрата — прямоугольная трапеция (в масштабе): основания $\Gamma_1 x$ и $\Gamma_2 x$, высота $x$*

**6. Пункт 3: отношение площадей.** Площадь трапеции — полусумма оснований на высоту:

$$S' = \frac{\Gamma_1 x + \Gamma_2 x}{2} \cdot x, \qquad k = \frac{S'}{x^2} = \frac{\Gamma_1 + 1/\Gamma_1}{2} = \frac{0{,}8 + 1{,}25}{2} = 1{,}025.$$

**Обратите внимание.** Продольное «увеличение» здесь ровно 1 только для отрезка $AB$ целиком; увеличения отдельных вертикальных сторон разные, поэтому изображение квадрата — не квадрат, а трапеция.

**Проверка.** Числа: при $f = 1$ формула линзы для $A$: $\frac{1}{1{,}8} + \frac{1}{2{,}25} = 0{,}556 + 0{,}444 = 1$ — верно; $A'B' = 2{,}25 - 1{,}8 = 0{,}45 = x$ — верно. Высота точки $D'$ по лучу через $F'$: $-x\left(\frac{b}{f} - 1\right) = -0{,}45 \cdot 1{,}25 = -0{,}5625 = -\Gamma_2 x$ — совпадает с увеличением. Предел: $\Gamma_1 \to 1$ (квадрат стягивается к $2f$) даёт $\Gamma_2 \to 1$, $C'D'/CD \to 1$, $k \to 1$. Неравенство

$k = \frac{1}{2}\left(\Gamma_1 + \frac{1}{\Gamma_1}\right) \geq 1$ — площадь изображения не меньше площади предмета.

Итог: условие $A'B' = AB$ ставит квадрат и его изображение симметрично друг другу, и увеличения двух сторон оказываются взаимно обратными.

**Ответ.** 1) $\Gamma_2 = 1/\Gamma_1 = 1{,}250$; 2) $C'D'/CD = \sqrt{1 + (1/\Gamma_1 - \Gamma_1)^2} \approx 1{,}097$; 3) $k = \frac{1}{2}(\Gamma_1 + 1/\Gamma_1) = 1{,}025$.