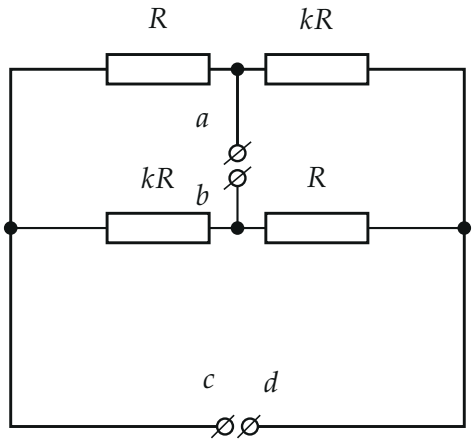
Резисторы и омметр

Задача 4. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 10 класс, задача 4] «Резисторы и омметр».

В цепи, показанной на рисунке, резисторы имеют сопротивления R и kR ($k = 2$). К клеммам a и b подключают идеальный омметр, а к клеммам c и d — идеальный амперметр. Омметр при этом показывает $\Omega_1 = 5$ Ом, а амперметр — $I_1 = 100$ мА.



1. Чему равно сопротивление R? Дайте ответ в омах с округлением до сотых долей.
2. Какая суммарная тепловая мощность P выделяется на резисторах? Дайте ответ в ваттах с округлением до сотых долей.

Омметр и амперметр меняются местами.

3. Какими станут показания Ω_2 омметра? Дайте ответ в омах с округлением до десятых долей.
4. Какими станут показания I_2 амперметра? Дайте ответ в миллиамперах с округлением до целого числа.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на расчёт цепи с идеальными приборами. Идеальный амперметр — провод нулевого сопротивления: он соединяет клеммы c и d, то есть левый и правый края схемы в один узел. После этого схема распадается на две параллельные пары

резисторов, включённые последовательно, и сопротивление считается сразу. Ток через амперметр находим по первому правилу Кирхгофа в узле. Идеальный омметр — источник постоянной ЭДС со встроенным измерителем тока: он показывает сопротивление цепи между своими клеммами и гонит через неё ток I_0.

Обозначения. L и P — левый и правый узлы схемы (концы клемм c и d); I_0 — ток через омметр; $R_{\text{пар}} = \dfrac{R \cdot kR}{R + kR} = \dfrac{k}{k+1}R$ — сопротивление пары $R \parallel kR$.

1. Эквивалентная схема. Амперметр соединяет узлы L и P, их можно считать одной точкой LP. От клеммы a к LP ведут два резистора: R (налево) и kR (направо) — они соединены параллельно. От LP к клемме b — тоже два: kR (из L) и R (из P) — тоже параллельно (рис. 1).

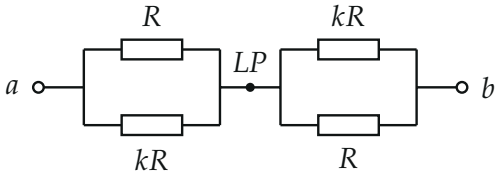


Рис. 1. Амперметр замкнул узлы L и P: между a и b — две параллельные пары $R \parallel kR$, включённые последовательно

2. Пункт 1: сопротивление. Омметр показывает сопротивление цепи между a и b:

$$\Omega_1 = 2R_{\text{пар}} = \frac{2k}{k+1}R \;\Rightarrow\; R = \frac{k+1}{2k}\,\Omega_1 = \frac{3}{4}\cdot 5\ \text{Ом} = 3{,}75\ \text{Ом}.$$

3. Токи в резисторах. Ток I_0 омметра входит в клемму a и делится между параллельными R и kR обратно пропорционально сопротивлениям (напряжение на них одно):

$$I_{aL} = \frac{k}{k+1}I_0 \ \text{(через } R\text{)}, \qquad I_{aP} = \frac{1}{k+1}I_0 \ \text{(через } kR\text{)}.$$

Так же у клеммы b: из L через kR течёт $\dfrac{1}{k+1}I_0$, из P через R — $\dfrac{k}{k+1}I_0$ (рис. 2).

4. Ток через амперметр. Первое правило Кирхгофа для узла L: в него втекает $\dfrac{k}{k+1}I_0$ (от a), вытекает $\dfrac{1}{k+1}I_0$ (к b), остаток уходит через амперметр в узел P:

$$I_1 = \frac{k}{k+1}I_0 - \frac{1}{k+1}I_0 = \frac{k-1}{k+1}I_0 \;\Rightarrow\; I_0 = \frac{k+1}{k-1}I_1 = 3\cdot 0{,}1\ \text{А} = 0{,}3\ \text{А}.$$

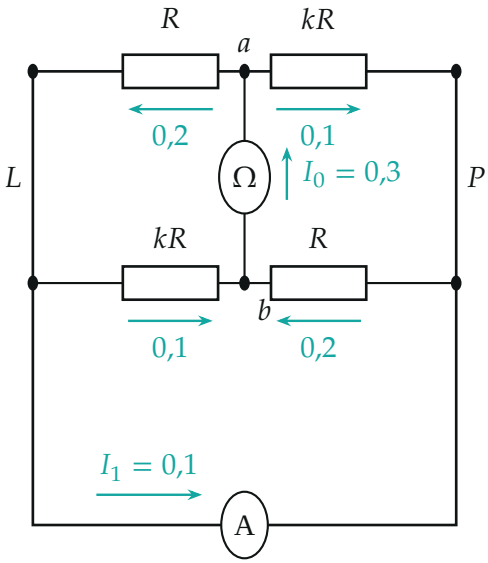


Рис. 2. Первое подключение: омметр Ω на a, b, амперметр A на c, d. Токи — в амперах; в узле L: $0{,}2 = 0{,}1 + 0{,}1$

5. Пункт 2: тепловая мощность. Вся работа источника омметра выделяется на резисторах; по закону Джоуля — Ленца для цепи с сопротивлением Ω_1:

$$P = I_0^2\,\Omega_1 = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 I_1^2\,\Omega_1 = 0{,}3^2\cdot 5\ \text{Вт} = 0{,}45\ \text{Вт}.$$

Второй способ — сложить мощности на каждом резисторе (токи на рис. 2): $2\cdot 0{,}2^2\cdot 3{,}75 + 2\cdot 0{,}1^2\cdot 7{,}5 = 0{,}30 + 0{,}15 = 0{,}45$ Вт — то же.

6. Пункт 3: приборы поменяли местами. Теперь амперметр соединяет клеммы a и b, то есть средние точки верхней и нижней ветвей, в один узел ab, а омметр подключён к c, d — к узлам L и P (рис. 3). От L к узлу ab идут R (верхний) и kR (нижний) — параллельно; от ab к P — kR и R — параллельно. Это та же цепь: две пары $R \parallel kR$ последовательно. Значит,

$$\Omega_2 = \frac{2k}{k+1}R = \Omega_1 = 5{,}0 \text{ Ом}.$$

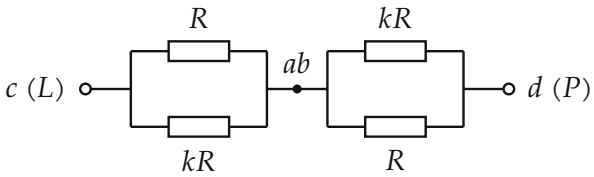


Рис. 3. После перестановки амперметр замкнул a и b: между c и d — снова две пары $R \parallel kR$ последовательно

7. Пункт 4: ток через амперметр. Сопротивление цепи то же, источник омметра тот же — ток через омметр тот же: $I_0 = 0{,}3$ А. Он входит в L и делится: через верхний R в точку a — $\frac{k}{k+1}I_0$, через нижний kR в точку b — $\frac{1}{k+1}I_0$. Из точки a к P через kR уходит $\frac{1}{k+1}I_0$, из b через R — $\frac{k}{k+1}I_0$. Первое правило Кирхгофа для точки a: лишнее уходит через амперметр в b:

$$I_2 = \frac{k}{k+1}I_0 - \frac{1}{k+1}I_0 = \frac{k-1}{k+1}I_0 = I_1 = 100 \text{ мА}.$$

Обратите внимание. Ответ пункта 4 опирается на то, что омметр — один и тот же прибор: при одинаковом сопротивлении цепи его источник даёт тот же ток I_0.

Проверка. Размерность: $\frac{2k}{k+1}R$ — омы. Предел $k = 1$: все резисторы одинаковы, схема симметрична, $I_1 = 0$ — по формуле $\frac{k-1}{k+1}I_0 = 0$,

верно; $\Omega_1 = R$ — две пары $R/2$ последовательно, верно. Узел P при первом подключении: втекают 0,1 (от a) и 0,1 (амперметр), вытекает 0,2 (к b) — сходится.

Итог: перестановка приборов переводит схему саму в себя — у неё одна и та же структура «пара — узел — пара», поэтому показания не меняются.

Ответ. 1) $R = \dfrac{k+1}{2k}\Omega_1 = 3{,}75$ Ом; 2) $P = \left(\dfrac{k+1}{k-1}\right)^2 I_1^2\Omega_1 = 0{,}45$ Вт; 3) $\Omega_2 = 5{,}0$ Ом; 4) $I_2 = 100$ мА.